

SF1600, Differential- och integralkalkyl I, del 1.
Tentamen, måndagen den 9 mars 2009 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta.

För betyg E krävs minst 15 poäng på A-delen.

Totalt 20p varav minst 15p på A-delen ger betyg D.

Totalt 25p varav minst 15p på del A och 5p på del B ger betyg C.

Totalt 30p varav minst 15p på del A och 10p på del B ger betyg B.

Totalt 35p varav minst 15p på del A och 15p på del B ger betyg A.

Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Följande tabell gäller:

Skrivning	KS1	HS1	KS2	HS2	KS3	HS3	KS4
Uppgift	1	2	4	3	5	7	6

DEL A

- (3p) 1. Funktionen $y = f(x)$ definieras för $x > 0$, $x \neq 1$ som

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x}}{x-1}.$$

(a) Definiera $f(1)$ så att f blir kontinuerlig i punkten $x = 1$.

(b) Räkna ut $f'(1)$ för den erhållna kontinuerliga funktionen.

- (3p) 2. Bestäm de punkter på kurvan

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$$

där tangentlinjen är parallel med linjen $y = -x$ (d v s den har lutningen $k = -1$).

- (3p) 3. Bestäm värdemängden (range) till funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x}}$$

definierad för $x > 0$.

- (3p) 4. Beräkna derivatan av funktionen

$$g(x) = \int_{\ln x}^{2 \ln x} \frac{e^t}{t} dt.$$

- (3p) 5. Räkna ut integralen

$$\int \frac{dx}{x(1 + \sqrt{x})^2}.$$

- (3p) 6. Räkna ut gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(2x - 1) + \frac{2}{\pi} \sin(\pi x)}{(x - 1)^3}.$$

VÄND!

(3p) 7. Området som ligger mellan kurvor $y = x^2$ och $y = 18 - x^2$ roterar ett varv kring y -axeln. Bestäm volymen av erhållen rotationskropp.

(3p) 8. Lös differentialekvationen

$$y' = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

tillsammans med begynnelsevillkor $y(0) = 1$.

DEL B

(5p) 9. Visa att generaliserade integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{(x+1)^2} dx$$

konvergerar och bestäm dess värde.

(5p) 10. För vilka värden på parametern $a > 0$ konvergerar serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^a - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^a + 1}} \right) \quad ?$$

(5p) 11. Finns det något värde på parametern b så att ekvationen

$$\frac{x^4 + 2}{(x-2)^4} = b$$

har tre olika reella lösningar?

(5p) 12. En designer projekterar ett trähus med ett litet mansardrum under taket (se bilden nedan). Rummet skall ha bredden $b = 4m$ och höjden $h = 2m$. Bestäm minsta möjliga längden l av en sida av taket över huset (taket är symmetriskt).

