Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1600, Differential- och integralkalkyl I, del 1.
Tentamen, den 1 juni 2009. Lösningsförslag.

1. Jämförelse av termer x^2 och x^a under roten visar att man skall skilja mellan fallen $a > 2$, $a = 2$ och $a < 2$.

Fall $a > 2$. Vi har

$$\lim = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{a/2}\sqrt{1 + x^{2-a} + x^{-a}}}{x\left(1 + \frac{\arctan x}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} x^{a/2-1} \cdot \frac{1}{1} = \infty$$

eftersom $a/2 > 1$ ger oss $x^{a/2-1} \to \infty$.

Fall $a = 2$. Vi har

$$\lim = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{2 + 1/x^2}}{x\left(1 + \frac{\arctan x}{x}\right)} = \sqrt{2}.$$

Fall $a < 2$. Vi har

$$\lim = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1 + x^{a-2} + x^{-2}}}{x\left(1 + \frac{\arctan x}{x}\right)} = 1.$$

Vi ser att gränsvärdet är ändligt för $a \le 2$.

2. Ekvationen för normallinjen är

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

där $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ och $k = -1/y'(x_0)$. För att bestämma $y'(x_0)$, använder vi oss av implicit derivering. Derivering av kurvans ekvation ger

$$y'(x) = \frac{1}{x + 3y(x)} \cdot (1 + 3y'(x))$$

varav hittar vi

$$y'(x) = \frac{1}{x + 3y(x) - 3}.$$

I punkten $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ får vi $y'(x_0) = -1/2$ vilket ger $k = 2$. Alltså, normallinjen har ekvation

$$y = 2(x - 1).$$

3. Derivatan av funktionen är

$$y'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}.$$

Den är 0 i punkter $x = 0$ och $x = 2$. Dessutom derivatan är positiv i intervallet $(0, 2)$ och den är negativ i intervaller $(-\infty, 0)$ och $(2, \infty)$. Undersökningen visar att $x = 0$ är en lokal minimum punkt. Dessutom $y(0) = 0$ och $y(x) > 0$ för alla $x \neq 0$ vilket visar att $x = 0$ är även en global minimumpunkt.

Punkten $x = 2$ är en lokal maximumpunkt enligt tidigare undersökning. Men vi ser att $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$ och då antar funktionen värdena större än $f(2)$ vilket visar att $f(2)$ är inte global maximumpunkt.

4. Vi gör substitution $e^x = y$, $x = \ln y$, $dx = \frac{dy}{y}$. Integralen blir

$$\int \frac{y^2\,dy}{(y-1)^2} = \int \frac{z^2+2z+1}{z^2}\,dz,$$

där $z = y - 1 = e^x - 1$. Den sista integralen är

$$\int \left(1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}\right) dz = z + 2\ln|z| - \frac{1}{z} + C = e^x + 2\ln|e^x - 1| - \frac{1}{e^x - 1} + C_1.$$

Svar: $e^x + 2\ln|e^x - 1| - 1/(e^x - 1) + C$.

5. Vi bestämmer först skärningspunkter: ekvationen $5 - x^2 = 1$ ger oss $x = \pm 2$.

Linjen $y = 1$ tas som en ny x-axeln vilket innebär att ny y-variabel är $y_1 = y - 1$, där y är den gamla variabeln och kurvans ekvation i nya koordinater är

$$y_1(x) = 4 - x^2.$$

Volymen av rotationskropp blir

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^2\,dx = 2\pi \int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4)\,dx = 512\pi/15.$$

Svar: $512\pi/15$.

6. Vi har för x nära origo

$$f(x) = \frac{x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)}{x(1-x^2)} = \left(x - \frac{x^5}{6} + o(x^5)\right) \cdot \frac{1}{1-x^2}.$$

Vi observerar att denna formeln stämmer med villkor $f(0) = 0$. Utvecklingen

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^5)$$

ger oss

$$f(x) = \left(x - \frac{x^5}{6} + o(x^5)\right) \cdot \left(1 + x^2 + x^4 + o(x^5)\right) = x + x^3 + x^5 - \frac{x^5}{6} + o(x^5) = x + x^3 + \frac{5}{6}x^5 + o(x^5).$$

Enligt Taylors formel, termen med x^5 har koefficient $\frac{f^{(5)}(0)}{5!}$ och vi får

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{5}{6}$$

varav $f^{(5)}(0) = 100$.

Svar: 100.

7. Vi undersöker absolut konvergens av serien d v s undersöker samma termer med absolutbelopp tecken. Kvotkriterium fungerar bra i detta fall. Vi har

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^5 + 4^{n+1}} \cdot \frac{n^5 + 4^n}{|x|^n} = \frac{|x| \cdot 4^n \left(\frac{n^5}{4^n} + 1\right)}{4^{n+1}\left(1 + \frac{(n+1)^5}{4^{n+1}}\right)} = \frac{|x|}{4} \cdot \frac{1 + \frac{n^5}{4^n}}{1 + \frac{(n+1)^5}{4^{n+1}}}.$$

Det sista uttrycket har gränsvärdet $\frac{|x|}{4}$. Enligt kvotkriterium konvergerar serien om $\frac{|x|}{4} < 1$ vilket ger oss konvergensradien $R = 4$.

Svar: 4.

8. Det är en linjär ekvation av första ordningen. Vi skriver om den först som

$$y' - \frac{2}{x}y = x^3.$$

Den integrerande faktorn är

$$\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{2}{x}\,dx\right) = \exp(-2\ln x) = \frac{1}{x^2}.$$

Efter multiplikation med den blir ekvationen

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = x$$

eller

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) = x.$$

Efter integrering får vi

$$\frac{y}{x^2} = \frac{x^2}{2} + C$$

varav $y = x^4/2 + Cx^2$.

Svar: $x^4/2 + Cx^2$.

9. Vi undersöker funktionen

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - x.$$

Vi har $f(0) = 0$. Dessutom,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

och vi ser att $f'(x) \leq 0$ för alla x. Detta visar att f är avtagande på hela reella axeln och tillsammans ned villkor $f(0) = 0$ detta visar att $f(x) \leq 0$ för positiva x.

10. Längden ges av formeln

$$l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx.$$

Enligt integralkalkylens huvudsats,

$$y'(x) = -\sqrt{\cos x}$$

och vi får

$$l = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2\cos^2(x/2)}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2}\cos(x/2)\,dx = 2\sqrt{2}\sin(x/2)\Big|_0^{\pi/2} = 2.$$

Svar: 2.

11. Efter bytet av variabler

$$-\ln x = t;\ x = e^{-t};\ dx = -e^{-t}\,dt$$

transformeras integralen till

$$\int_{+\infty}^{0} \sin(-t) \cdot (-e^{-t})\, dt = -\int_{0}^{+\infty} \sin t\, e^{-t}\, dt.$$

Den sista integralen konvergerar eftersom absolut belopp av funktionen under integralen är mindre än e^{-t} och integralen av den här funktionen över intervallet $(0, +\infty)$ konvergerar.

Vi har enligt BETA

$$-\int_{0}^{+\infty} \sin t\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t)\Big|_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{2}.$$

Svar: $-1/2$.

12. Kvadrerad avstånd från punkten med koordinater $(x, y(x))$ till origo ges av formeln

$$d(x) = x^2 + y(x)^2 = x^2 + \frac{1}{(1+4x^2)^2}.$$

Den här funktionen skall minimiseras på intervallet $[0, +\infty)$. Vi har

$$d'(x) = 2x - 2\frac{8x}{(1+4x^2)^3} = \frac{2x((1+4x^2)^3 - 8)}{(1+4x^2)^3}.$$

Derivatan blir 0 om

$$1 + 4x^2 = 2$$

vilket ger oss $x = 1/2$. Dessutom, formeln för derivatan visar att den är positiv i intervallet $(1/2, \infty)$ och den är negativ i intervallet $(0, 1/2)$. Detta visar att $x = 1/2$ är en global minimumpunkt. Den minsta avståndet antas då i punkten $(1/2, y(1/2)) = (1/2, 1/2)$.

Svar: $x = 1/2$, $y = 1/2$.