Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1600, Differential- och integralkalkyl I, del 1.
Tentamen, måndagen den 1 juni 2009 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta.

För betyg E krävs minst 15 poäng på A-delen.
Totalt 20p varav minst 15p på A-delen ger betyg D.
Totalt 25p varav minst 15p på del A och 5p på del B ger betyg C.
Totalt 30p varav minst 15p på del A och 10p på del B ger betyg B.
Totalt 35p varav minst 15p på del A och 15p på del B ger betyg A.

Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Följande tabell gäller:

Skrivning	KS1	HS1	KS2	HS2	KS3	HS3	KS4
Uppgift	1	2	4	3	5	7	6

DEL A

(3p) **1.** För vilka värdena på parametern a gränsvärdet

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x^a+1}}{x+\arctan^2 x}$$

är ändligt?

(3p) **2.** Bestäm ekvationen för normallinjen till kurvan

$$y = \ln(x+3y)$$

i punkten $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

(3p) **3.** Bestäm lokala extrempunkter av funktion

$$y = x^2 e^{-x}$$

och avgör deras karaktär. Vilka av dem är globala extrempunkter?

(3p) **4.** Räkna ut integralen

$$\int \frac{e^{3x}\,dx}{(e^x-1)^2}$$

(3p) **5.** Den del av parabeln $y = 5 - x^2$ som ligger ovanför linjen $y = 1$ roterar ett varv kring den här linjen. Bestäm volymen av erhållen rotationskropp.

(3p) **6.** Funktionen $f(x)$ definieras som

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x-x^3} \quad \text{om} \quad x \neq 0 \quad \text{samt} \quad f(0) = 0.$$

Bestäm värdet av den femte derivatan av f i origo.

Ledning: Taylors utvecklingar.

VÄND!

(3p) **7.** Bestäm konvergensradie till potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^5 + 4^n}.$$

(3p) **8.** Lös differentialekvationen

$$xy' - 2y = x^4.$$

DEL B

(5p) **9.** Bevisa olikheten

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \leq x$$

för $x \geq 0$.

(5p) **10.** Beräkna längden av kurvan

$$y(x) = \int_x^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, dx$$

mellan $x = 0$ och $x = \pi/2$.

(5p) **11.** Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{\sin(\ln x)\, dx}{\sqrt{x}}$$

konvergerar och bestäm dess värde.

(5p) **12.** Vilken punkt på följande kurva ligger närmast origo:

$$y = \frac{1}{1 + 4x^2}, \quad x \geq 0.$$