Lösningar till tentamen den 16/3 2005

Diff. och Int. I, del 2, 5B1102, 5B1105 och 5B1125

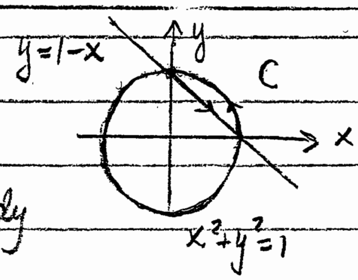
1. Punkten $(1,1,f(1,1))$ är i planet. $\Rightarrow 4+3-3f(1,1)=1$
$\Rightarrow \underline{f(1,1)=2}$. Tangentplanets normaler $(D_1f(1,1), D_2f(1,1), -1)$ och $(4,3,-3)$ är parallella.
$D_1f(1,1) = 4t$, $D_2f(1,1) = 3t$, $-1 = -3t \Rightarrow t = \frac{1}{3}$,
$\underline{D_1f(1,1) = \frac{4}{3}}$, $\underline{D_2f(1,1) = 1}$.

2. Gradienten av f i punkten (x,y,z) är $\left(\frac{y}{xy+z}, \frac{x}{xy+z}, \frac{1}{xy+z}\right)$;
$\text{grad}\, f(1,3,0) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
Riktningen $v = -\frac{(1,3,0)}{\sqrt{10}}$. Riktningsderivatan i riktningen v är

$$D_v f(1,3,0) = \text{grad}\, f(1,3,0)\cdot v = -\frac{1}{\sqrt{10}}\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\cdot(1,3,0) = \underline{\underline{-\frac{2}{\sqrt{10}}}}$$

3. Enligt kedjeregeln är $D_1F(x,y) = 2x\,f'(x^2-y^2)$ och
$D_2F(x,y) = -2y\,f'(x^2-y^2)$, $D_1G(x,y) = y\,g'(xy)$ och $D_2G(x,y) = x\,g'(x,y)$.
Skalärprodukten $\text{grad}\,F(x,y)\cdot\text{grad}\,G(x,y) = (2xf'(x^2-y^2), -2yf'(x^2-y^2))\cdot(yg'(xy), xg'(xy)) = 2xf'(x^2-y^2)yg'(x,y) - 2yf'(x^2-y^2)xg'(xy) = 0$.

4. Vi kan använda Green's formel



Om $F(x,y) = (x^2-y^2, 2xy) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$

$$\oint_C F\cdot dr = \iint_A (D_1F_2 - D_2F_1)\,dx\,dy = 4\iint_A y\,dx\,dy$$

där A är området innanför C

$$\int_C F\cdot dr = 4\int_0^1\left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right)dx = 4\int_0^1 \frac{1}{2}\left(1-x^2-(1-x)^2\right)dx$$

$$= 4\int_0^1 (x-x^2)\,dx = 4\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \underline{\frac{2}{3}}$$

5. Låt $F(x,y) = x^3 + y^3 - 5xy + 3$.
$D_2 F(x,y) = 3y^2 - 5x$. Eftersom $F(1,1) = 0$ och $D_2 F(1,1) = -2 \neq 0$, definiera ekvationen $F(x,y) = 0$ enligt implicitfunktionssatsen i en omgivning av $(1,1)$ en deriverbar funktion $y = f(x)$. Derivering av ekv. $F(x,y) = 0$ m.a. på x ger $3x^2 + 3y^2 y' - 5y - 5xy' = 0$
När $x = 1$, $y = 1$, $3 + 3y' - 5 - 5y' = 0 \Rightarrow y' = \underline{\underline{f'(1) = -1}}$

6. Vi visar att F har potential, dvs. $F = \text{grad } u$.
Antag att $D_1 u(x,y,z) = x e^{x^2}$. Då är $u = \frac{1}{2} e^{x^2} + g(y,z)$.
Derivering m.a. på y ger $D_2 u = D_1 g = 3(y+3)^2(z-1)$.
Genom att integrera får vi $g(y,z) = (y+3)^3(z-1) + h(z)$.
Vi deriverar $u = \frac{1}{2} e^{x^2} + (y+3)^3(z-1) + h(z)$ m.a. på z.
$\Rightarrow (y+3)^3 + h'(z) = (y+3)^3 \Rightarrow h(z)$ är konstant som vi kan välja $= 0$. Funktionen $u(x,y,z) = \frac{1}{2} e^{x^2} + (y+3)^3(z-1)$ uppfyller ekvationen $F = \text{grad } u$. Integralen är således oberoende av vägen.

$$\int_C F \cdot dr = u(0,0,1) - u(1,0,0) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}e - 27\right) = \underline{\underline{\frac{55-e}{2}}}$$

7. a) De partiella derivatorna av $f(x,y) = e^{xy+1} - xy$ är
$D_1 f(x,y) = y e^{xy+1} - y = y(e^{xy+1} - 1)$
$D_2 f(x,y) = x e^{xy+1} - x = x(e^{xy+1} - 1)$
Ekv. systemet $D_1 f(x,y) = 0$, $D_2 f(x,y) = 0$ har lösningarna $x = y = 0$ och $xy + 1 = 0$ dvs. $y = -\frac{1}{x}$.
De kritiska punkterna är $\underline{(0,0)}$ och $\underline{\left(x, -\frac{1}{x}\right)}$ där $x \neq 0$.
$D_{11} f(x,y) = y^2 e^{xy+1}$, $D_{12} f(x,y) = e^{xy+1} + xy e^{xy+1} - 1$
$D_{22} f(x,y) = x^2 e^{xy+1}$
I origo får vi $AC - B^2 = 0 - (e-1)^2 < 0$
Origo är $\underline{\text{en sadelpunkt}}$, dvs. inte någon extrempunkt.

7 b) För $g(t) = e^{t+1} - t$ är $g'(t) = e^{t+1} - 1 = 0$ om $t = -1$,
$g'(t) < 0$ om $t < -1$ och $g'(t) > 0$ om $t > -1$; $g(-1) = 2$.
För alla t är $g(t) \geq g(-1) = 2$.
$\Rightarrow f(x,y) = e^{xy+1} - xy = g(xy) \geq 2$ för alla (x,y)
och $f(x, -\frac{1}{x}) = 2$ om $x \neq 0$.

Minsta värdet av f i $\mathbb{R}^2$ är 2.

8. Ytan är en ellips. Dess ekvation kan skrivas $(x-2)^2 + 2(y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$. Ellipsens halvaxlar är $1, \frac{1}{\sqrt{2}}$ och 1 och mittpunkten $(2,-1,1)$.
Högsta punkten är $(2,-1,2)$ och lägsta $(2,-1,0)$.

Alternativt kan Lagrange's metod användas
Den kontinuerliga funktionen $f(x,y,z) = z$ antar på ellipsen, som är sluten och begränsad, maximum och minimum.

Låt $L(x,y,z,\lambda) = z - \lambda(x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 6)$
Vi söker de kritiska punkterna till L.

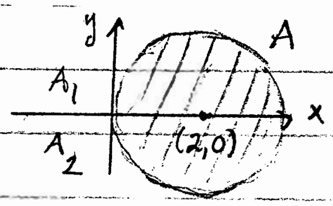
$$\begin{cases} D_1 L(x,y,z,\lambda) = -2\lambda x + 4\lambda = 0 \\ D_2 L(x,y,z,\lambda) = -4\lambda y - 4\lambda = 0 \\ D_3 L(x,y,z,\lambda) = 1 - 2\lambda z + 2\lambda = 0 \\ D_4 L(x,y,z,\lambda) = -(x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 6) = 0 \end{cases}$$

$\lambda(4-2x) = 0$
$-4\lambda(1+y) = 0$
$1 + 2\lambda = 2\lambda z$

$\lambda = 0$ uppfyller inte den 3. ekvationen $\Rightarrow x = 2,\ y = -1$

Insättning i den 4. ekvationen medför att
$-(4 + 2 + z^2 - 8 - 4 - 2z + 6) = 0 \qquad z^2 - 2z = 0 \qquad z = 2,\ z = 0$
Den tredje ekv. ger då $\lambda = \frac{1}{2}$ resp. $\lambda = -\frac{1}{2}$.
Svar: Punkterna $(2,-1,2)$ resp. $(2,-1,0)$.

9. $x^2+y^2 \le 4x \iff (x-2)^2+y^2 \le 4$



Med polära koordinater $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ olikheten är $r^2 \le 4r\cos\theta \iff r(r-4\cos\theta) \le 0$ som ger $r \le 4\cos\theta$.

För halvsfären A_1 där $y \ge 0$ $\iint_{A_1} x|y|\,dx\,dy =$

$\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta} r^3\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,dr$. $\iint_{A_2} x|y|\,dx\,dy = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{4\cos\theta} r^3\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,dr$

(på A_2 är $|y|=-y$) Med variabelbytet $t=-\theta$

$$\iint_{A_2} x|y|\,dx\,dy = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{4\cos t} r^3\cos t\,(-\sin t)(-dt)\,dr$$

$=$ samma som $\iint_{A_1}$

$$\Rightarrow \iint_A x|y|\,dx\,dy = 2\iint_{A_1} x|y|\,dx\,dy = 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\left[\tfrac{1}{4}r^4\right]_0^{4\cos\theta}d\theta$$

$$= 2\cdot 4^3\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^5\theta\,d\theta = \frac{2\cdot 4^3}{6}\left[-\cos^6\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{4^3}{3} = \underline{\underline{\frac{64}{3}}}$$

10. Låt $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$. För ytan $z=f(x,y)$ är

$$dS = \sqrt{1+(D_1f(x,y))^2+(D_2f(x,y))^2}\,dx\,dy$$

Nu är $D_1f(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$, $D_2f(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

och $dS=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{9-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\,dx\,dy.$

$J=\iint_S (x^2+y^2)\,dS = \iint_A \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\,dx\,dy$ där A är $x^2+y^2 \le 9$

I polära koordinater integralen är

$3\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\frac{r^3}{\sqrt{9-r^2}}\,d\theta\,dr = 6\pi\int_0^3\frac{r^3}{\sqrt{9-r^2}}\,dr$. Låt $y=\sqrt{9-r^2}$

Då är $r^2=9-y^2$, $2r\,dr=-2y\,dy$ $\quad J=6\pi\int_3^0\frac{(9-y^2)(-y\,dy)}{y}$

$$= 6\pi\int_0^3(9-y^2)\,dy = 6\pi\left[9y-\tfrac{1}{3}y^3\right]_0^3 = 6\pi\cdot 18 = \underline{\underline{108\pi}}$$

11. $\iiint_K xz\,dx\,dy\,dz = \iint_T \left(\int_0^{1-x-y} xz\,dz \right) dx\,dy$ där T är

triangeln $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$. Integralen är

$$\iint_T \frac{x}{2}(1-x-y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x(1-x-y)^2\,dy \right) dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 x\left[(1-x-y)^3\right]_{y=0}^{1-x} dx = \frac{1}{6}\int_0^1 x(1-x)^3\,dx =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{120}}}$$