

Institutionen för Matematik
KTH
Kirsti Mattila

**Tentamensskrivning, Differential- och integralkalkyl I, del 2,
5B1102, 5B1105, 5B1125**

Onsdagen den 16 mars 2005, kl 8.00-13.00.

Tillåtet hjälpmedel är Råde och Westergren: Beta, Mathematics Handbook.
Preliminära betygsgränser för 3, 4 och 5 är 20, 27 och 35 poäng.

.....

1. Funktionen $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ har kontinuerliga partiella derivator. Planet $4x + 3y - 3z = 1$ är tangentplan till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, f(1, 1))$. Bestäm $f(1, 1)$, $D_1 f(1, 1)$ och $D_2 f(1, 1)$. (3p)

2. Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x, y, z) = \ln(xy + z)$ i punkten $(1, 3, 0)$ i riktningen mot origo. (3p)

3. Antag att $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ och $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ och är deriverbara funktioner. Låt $F(x, y) = f(x^2 - y^2)$ och $G(x, y) = g(xy)$ för alla $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Visa att $\text{grad} F(x, y) \cdot \text{grad} G(x, y) = 0$. (3p)

4. Beräkna linjeintegralen $\oint_C (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$ där C är kurvan som begränsar området $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1\}$ genomlöst ett varv i positiv riktning. (4p)

5. Visa att ekvationen $x^3 + y^3 - 5xy + 3 = 0$ definierar i en omgivning till punkten $(1, 1)$ en deriverbar funktion $y = f(x)$ och bestäm $f'(1)$. (4p)

6. Visa att integralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^{x^2}, 3(y+3)^2(z-1), (y+3)^3)$ är oberoende av vägen och beräkna integralen när C är en glatt kurva från punkten $(1, 0, 0)$ till punkten $(0, 0, 1)$. (4p)

7. Låt $f(x, y) = e^{xy+1} - xy$.

a) Bestäm alla kritiska punkter till f och undersök om origo är en lokal maximumpunkt, minimumpunkt eller ingen extrempunkt.

b) Visa att f har absolut minimum i $\mathbf{R}^2$.

(Ledning: Undersök funktionen $g(t) = e^{t+1} - t$.) (5p)

v.g. vänd

8. Bestäm de högsta och lägsta punkterna på ytan $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 6 = 0$. Vi antar att koordinatsystemets positiva z -axel pekar uppåt. (4p)

9. Beräkna dubbelintegralen $\iint_A x|y| \, dx \, dy$ där A är området $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4x\}$. (5p)

10. Beräkna integralen $\iint_S (x^2 + y^2) \, dS$ där S är ytan av halvsfären $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. (4p)

11. Beräkna integralen

$$\iiint_K xz \, dx \, dy \, dz$$

där K är tetraedern som bestäms av olikheterna $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1$. (5p)
