

**5B1105, Differential- och integralkalkyl I, del 2.**  
**Lösning till tentamen, tisdag 29 november 2005.**

**DEL A**

- (3p) 1. Beräkna den blandade andraderivatans av uttrycket

$$\frac{\sin xy}{x} e^x$$

i punkten  $x = 0, y = 17$ .

---

Eftersom  $\partial f / \partial y = e^x \cos xy$  får man

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x (\cos xy - y \sin xy)$$

- 
- (3p) 2. Bestäm maclaurinutvecklingen av

$$\frac{\arctan 2x}{\sqrt{1+xy}}$$

till och med termer av grad fem.

---

Beta har utvecklingarna för  $\arctan x$  och  $(1+x)^{-1/2}$  som ger

$$\begin{aligned} \left(2x - \frac{8x^3}{3} + \frac{32x^5}{5} - \dots\right) \left(1 - \frac{xy}{2} + \frac{3x^2y^2}{8} + \dots\right) = \\ = 2x - \frac{8x^3}{3} - x^2y + \frac{32x^5}{5} + \frac{4x^4y}{3} + \frac{3x^3y^2}{4} + \dots \end{aligned}$$

- 
- (3p) 3. Sök största värdet av uttrycket  $x + y$  på ellipsen  $6x^2 + 3y^2 = 1$ .

---

Sätts derivatorna lika med noll för uttrycket  $x + y + \lambda(6x^2 + 3y^2 - 1)$  får man

$$1 + 12\lambda x = 0, 1 + 6\lambda y = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow 6x^2 + 12x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

varav maxvärdet blir  $\sqrt{2}/2$ .

- 
- (3p) 4. En hyddas koniska tak beskrivs av  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ . Hyddans golv är cirkelytan i  $xy$ -planet inom cirkeln

$$x^2 + y^2 = 2x$$

Hyddans väggar är lodräta. Bestäm dess volym!

---

I polära koordinater är cirkelns ekvation  $r = 2 \cos \varphi$ , varav volymen blir

$$\iint z \, dx \, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} (2-r)r \, dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(4 \cos^2 \varphi - \frac{8}{3} \cos^3 \varphi\right) d\varphi = 2\pi - \frac{32}{9}$$

- (3p) 5. Bestäm längden av rymdkurvan

$$\left. \begin{array}{l} x = t^3/3 \\ y = t^2/\sqrt{2} \\ z = t \end{array} \right\} -1 \leq t \leq 1$$

---

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt = \int_{-1}^1 (t^2 + 1) dt = \frac{8}{3}$$

---

- (3p) 6. Beräkna kurvintegralen

$$\oint (\arctan x - 11y) dx + (6x + \cos y) dy$$

ett varv i positiv led runt den halva av enhetscirkeln där  $y \geq x$ .

---

Greens formel ger oss en dubbelintegral över halvcirkeln

$$\iint (6 + 11) dx dy = 17 \cdot \text{arean} = \frac{17\pi}{2}$$

---

- (3p) 7. Visa att följande vektorfält har potential och bestäm en sådan potential  $\Phi(x, y, z)$  som dessutom har  $\Phi(0, 0, 0) = 17$ .

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -ye^{-x} \\ e^{-x} - ze^{-y} \\ e^{-y} \end{pmatrix}$$

---

$$\Phi(x, y, z) = ye^{-x} + ze^{-y} + 17$$

---

8. Ett vektorfält definieras av  $\mathbf{F} = -\mathbf{grad} \Phi$ , där

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

- (3p) Bestäm dess totalflöde ut ur enhetssfären!

---

Singulariteten i origo gör Gauss sats oanvändbar, men man ser i stället att  $\mathbf{F}$  har beloppet 2 och är vinkelrätt mot sfären, så flödet blir två gånger sfärens area, dvs  $8\pi/3$ .

---

## DEL B

- (5p) 9. För datateknologernas använda godispapper behöver Escapen en lådformad plåtcontainer utan lock som ska rymma fyra kubikmeter. Hur ska kantlängderna  $x, y, z$  väljas så att plåtarean minimeras?

---

Enligt Lagrange bildar man

$$U = xy + 2yz + 2xz + \lambda(xyz - 4)$$

och sätter man derivatorna till noll får man  $x = y = 2, z = 1$ .

---

10. Vid en tentamen för datateknologer år 1992 gavs följande uppgift:  
(5p)

Beräkna integraluttrycket  $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx$

Den gången kom ingen på knepet, så vi tar uppgiften igen.

Beräkna integraluttrycket!

---

Knepet är att kasta om integrationsgränserna.

$$\int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{e-1}{2}$$

- 
11. Många små datateknologer leker i en cirkulär glänta med diametern 102 m.  
(5p) Plötsligt hörs ett rytande och alla datateknologer flyr till närmaste skogsbryn!  
Hur långt är det dit i genomsnitt?

---

Att svaret blir 17 står klart om man kan bevisa att medelavståndet till cirkelns centrum är 34.

$$\frac{1}{\text{arean}} \int \int r r dr d\varphi = \frac{2\pi}{\pi 51^2} \left[ r^3/3 \right]_0^{51} = 34$$

- 
12. En datateknolog får efter en gask för sej att ta en tur upp i stora skorstenen, som  
(5p) ju är en vertikal cylinder med enhetscirkulärt tvärsnitt. Turen börjar i punkten  
(1,0,0), går ett halvt varv moturs till (-1,0,0), därefter vertikalt sjutton meter upp  
till (-1,0,17), ytterligare ett halvt varv moturs till (1,0,17) och slutligen (med hög  
fart) sjutton meter ner till utgångspunkten. Vind och gravitation ger ett kraftfält

$$\mathbf{F} = - \begin{pmatrix} yz \\ x + xz \\ xy \end{pmatrix}$$

---

Hur stort blir det totala arbetet för skorstensklättraren?

---

Enligt Stokes sats kan man lika gärna beräkna flödet av **rot F** genom en yta som består av en vertikal rektangel med en horisontell halvcirkel i vardera änden. Eftersom **rot F** = (0, 0, -1) blir flödet  $-\pi$  och den efterfrågade arbetsinsatsen därmed  $\pi$ .

---