

5B1105, Differential- och integralkalkyl I, del 2.

Tentamen, tisdag 29 november 2005 kl 14.00–19.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta. För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 14 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Här motsvarar skrivning 1–7 uppgift 1–7.

DEL A

- (3p) 1. Beräkna den blandade andraderivatan av uttrycket

$$\frac{\sin xy}{x} e^x$$

i punkten $x = 0$, $y = 17$.

- (3p) 2. Bestäm maclaurinutvecklingen av

$$\frac{\arctan 2x}{\sqrt{1+xy}}$$

till och med termer av grad fem (och då räknas till exempel x^3y^2 som grad fem).

- (3p) 3. Sök största värdet av uttrycket $x + y$ på ellipsen $6x^2 + 3y^2 = 1$.

- (3p) 4. En hyddas koniska tak beskrivs av $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Hyddans golv är cirkelytan i xy -planet inom cirkeln

$$x^2 + y^2 = 2x$$

Hyddans väggar är lodräta. Bestäm dess volym!

- (3p) 5. Bestäm längden av rymdkurvan

$$\left. \begin{array}{l} x = t^3/3 \\ y = t^2/\sqrt{2} \\ z = t \end{array} \right\} -1 \leq t \leq 1$$

(Kurvan är omsorgsfullt vald så att det ska uppstå en jämn kvadrat.)

- (3p) 6. Beräkna kurvintegralen

$$\oint (\arctan x - 11y) dx + (6x + \cos y) dy$$

ett varv i positiv led runt den halva av enhetscirkeln där $y \geq x$.

7. Visa att följande vektorfält har potential och bestäm en sådan potential $\Phi(x, y, z)$ som dessutom har $\Phi(0, 0, 0) = 17$. (3p)

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -ye^{-x} \\ e^{-x} - ze^{-y} \\ e^{-y} \end{pmatrix}$$

8. Ett vektorfält definieras av $\mathbf{F} = -\mathbf{grad} \Phi$, där

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

- (3p) Bestäm dess totalflöde ut ur enhetssfären!

DEL B

9. För datateknologernas använda godispapper behöver Escapen en lådformad plåtcontainer utan lock som ska rymma fyra kubikmeter. Hur ska kantlängderna x, y, z väljas så att plåtarean minimeras? (5p)

10. Vid en tentamen för datateknologer år 1992 gavs följande uppgift: (5p)

$$\text{Beräkna integraluttrycket } \int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2} dx$$

Den gången kom ingen på knepet, så vi tar uppgiften igen.

Beräkna integraluttrycket!

11. Många små datateknologer leker i en cirkulär glänta med diametern 102 m. Plötsligt hörs ett rytande och alla datateknologer flyr till närmaste skogsbryn! Hur långt är det dit i genomsnitt? (5p)

12. En datateknolog får efter en gask för sej att ta en tur upp i stora skorstenen, som ju är en vertikal cylider med enhetscirkulärt tvärsnitt. Turen börjar i punkten $(1, 0, 0)$, går ett halvt varv moturs till $(-1, 0, 0)$, därefter vertikalt sjutton meter upp till $(-1, 0, 17)$, ytterligare ett halvt varv moturs till $(1, 0, 17)$ och slutligen (med hög fart) sjutton meter ner till utgångspunkten. Vind och gravitation ger ett kraftfält (5p)

$$\mathbf{F} = - \begin{pmatrix} yz \\ x + xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Hur stort blir det totala arbetet för skorstensklättraren?