

5B1105, Differential- och integralkalkyl I, del 2.
LÖSNING TILL TENTAMEN, TORSDAG 8 JUNI 2006

DEL A

1.

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{xy}}{y} = \frac{\partial}{\partial y} e^{xy} = x e^{xy} = e$$

2.

$$y \ln(1+x) = y\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\right) = xy - \frac{x^2 y}{2} + \frac{x^3 y}{3} - \dots$$

3. Med lagrangemultiplikatorn λ blir uttrycket $z = xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 3)$, varav

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + 2\lambda x = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + 2\lambda y = 0$$

där elimination av λ ger sambandet

$$y^3 = 2x^2 y \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}, y = 0 \text{ eller } x = \pm 1, y = \pm\sqrt{2}$$

och $x = 1, y = \sqrt{2}$ ger maximivärdet 2.

4. $z = 1$ ger cirkeln $x^2 + y^2 \leq 1$ och volymen ges alltså av dubbelintegralen över enhetscirkeln

$$\iint (z - 1) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sqrt{2 - r^2} - 1) r dr d\varphi = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{2} - 5)$$

5.

$$\text{Längden} = \int_0^2 \sqrt{36 + 64 + 100t^2} dt = 10(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{5}))$$

6. Greens formel ger $\iint (3x^2 + 3y^2) dx dy$ över enhetscirkeln och polära koordinater ger genast svaret $3\pi/4$.

7.

$$\Phi = xy + 2xz + 3yz + 17$$

8. Eftersom $\operatorname{div} \mathbf{F} = 4$ och kubens volym är 1 ger Gauss sats flödet 4.

DEL B

9. Med en lagrangemultiplikator får man $v = 4x + 5y + \lambda(2x^2 + 5y^2 - 325)$ varav

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4 + 4\lambda x = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 5 + 10\lambda y = 0$$

där elimination av λ ger sambandet $x = 2y$, som insatt i bivillkoret ger lösningen $x = 10, y = 5$ och maxhastigheten 65 km/h. Men vänta, hur vet vi att det är ett maximum vi har hittat? Vi måste kolla extremfallen med $x = 0$ eller $y = 0$ och dom visar sej ge lägre hastigheter.

10. Kasta först om integrationsordningen!

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^x dy = \int_0^\infty x e^{-x^2} = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

- 11.

$$\text{Medelhöjden} = \frac{1}{4\pi} \iint z \, dx \, dy = \frac{4}{3}$$

Integralen är volymen av halvklotet och den beräknade Arkimedes åt oss!

12. Differentiering ger tangentplanets ekvation

$$dx = f'(1) \cdot dx + f(1) \cdot dy - f'(1) \cdot dy$$

där $dx = x - 1$, $dy = y - 1$, $dz = z - 1$ och vi vill kolla att $dx = dy = dz = -1$ satisfierar ekvationen. Eftersom $f(1) = 1$ gör den faktiskt det.