

5B1105, Differential- och integralkalkyl I, del 2.

Tentamen, torsdag 8 juni 2006 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta. För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 14 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Här motsvarar skrivning 1–7 uppgift 1–7.

DEL A

- (3p) 1. Beräkna den blandade andraderivatan av uttrycket

$$\frac{e^{xy}}{y}$$

i punkten $x = 1$, $y = 1$.

- (3p) 2. Bestäm maclaurinutvecklingen av

$$\ln(1+x)^y$$

till och med termer av grad fyra (och då räknas till exempel x^3y som grad fyra).

- (3p) 3. Sök största värdet av uttrycket xy^2 på cirkeln $x^2 + y^2 = 3$.

- (3p) 4. Beräkna volymen av den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ som ligger ovanför planet $z = 1$.

- (3p) 5. Bestäm längden av rymdkurvan

$$\begin{aligned}x &= 6t \\ y &= 8t \\ z &= 5t^2\end{aligned}$$

från origo till punkten (12,16,20).

- (3p) 6. Beräkna kurvintegralen

$$\oint (\sin x - y^3) dx + (x^3 + \cos y) dy$$

ett varv i positiv led runt enhetscirkeln.

- (3p) 7. Har följande vektorfält en potential? Bestäm i så fall en sådan potential $\Phi(x, y, z)$ som dessutom har $\Phi(0, 0, 0) = 17$.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ x + 3z \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$$

- (3p) 8. Ett vektorfält definieras av $\mathbf{F} = \mathbf{grad}(x^2 + y^2 + z)$. Bestäm dess totalflöde ut ur en kub med sidan 1, som har ett hörn i origo och ett annat i $(1,1,0)$.

DEL B

- (5p) 9. I nollans lådbilstävling gör ett lag en konstruktion med två bakhjul (radien x cm) och fem små framhjul (radien y cm). Man beräknar att då komma upp i hastigheten $v = 4x + 5y$ kilometer i timmen, men hjulen får inte göras hur stora som helst — begränsningen $2x^2 + 5y^2 \leq 325$ måste hållas.

Sök maximalt v med detta bivillkor!

- (5p) 10. Vid ordinarie tentan för data hösten 2005 gavs ungefär följande uppgift:

$$\text{Beräkna integraluttrycket } \int_0^\infty dy \int_y^\infty e^{-x^2} dx$$

De flesta tentanderna gav då upp eftersom de inte kom på knepet.

Beräkna integraluttrycket!

- (5p) 11. Datateknologernas öltält är ju format som en halvsfär med radien två meter. (Golvytan är alltså 4π kvadratmeter.) Beräkna tältets genomsnittshöjd!

- (5p) 12. I en mardröm ser datateknologen Leyla en buktig dataskärm som beskrivs av ytan

$$z = y f(x/y)$$

där f är en mardrömsfunktion — inget man har lust att derivera, alltså. Den buktiga ytan passerar punkten $(1,1,1)$ och just där har den ett tangentbord som tangentplan.

Efter det svettiga uppvaknandet ställer Leyla upp tangentbordets ekvation och bevisar att även origo ligger i tangentbordets plan. Mycket nöjd kan hon sedan somna om.

Hur ser Leylas bevis ut?