

5B1105, Differential- och integralkalkyl I, del 2.
LÖSNING TILL TENTAMEN, TORSDAG 7 JUNI 2007

DEL A

1.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{2} x^2 \cos xy = 2\sqrt{2} x \cos xy - \sqrt{2} x^2 y \sin xy = 2\pi - \pi^2/4$$

2.

$$\sqrt{2} x \sin xy = \sqrt{2} x(xy - \frac{x^3 y^3}{6} + \dots)$$

3. Med lagrangemultiplikatorn λ blir uttrycket $z = 4x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$, varav

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4 + 2\lambda x = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3 + 2\lambda y = 0$$

där elimination av λ ger sambandet

$$4y = 3x \Rightarrow x = \pm 8/5, y = \pm 6/5$$

och $x = 8/5, y = 6/5$ ger maximivärdet 10.

4. Volymen *innanför* både paraboloid och kub ges av dubbelintegralen över en kvarts enhetscirkel av

$$\iint (1 - z) dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\varphi = \frac{\pi}{8}$$

Den del av enhetskuben som är utanför paraboloiden har alltså volymen $1 - \pi/8$.

5.

$$\text{Längden} = \int_1^e \sqrt{\frac{1}{t^2} + 4 + 4t^2} dt = \int_1^e (2t + \frac{1}{t}) dt = e^2$$

6. Greens formel ger $\iint (3x^2 + 3y^2) dx dy$ över enhetscirkeln och polära koordinater ger genast svaret $3\pi/2$.

7.

$$\Phi = xyz - y^2 + 17$$

8. Eftersom $\text{div } \mathbf{F} = 4$ och halvsfärens volym är $2\pi/3$ ger Gauss sats totalflödet $8\pi/3$ ut ur halvsfären. Men genom botten flödar det in π ($\mathbf{F}$ har z -komponenten 1 och cirkelytan har arean π) så flödet ut genom den buktiga ytan måste vara $11\pi/3$.

DEL B

9. Lagrangemultiplikatorer ger $v = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + y + z)$ varav

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 2z - \lambda + \mu = 0$$

där elimination av λ och μ ger två lösningar, nämligen minpunkten $(2, 2, 8)$ och maxpunkten $(-3, -3, 18)$.

10. Kasta först om integrationsordningen!

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{3}$$

- 11.

$$\text{Medelhöjden} = \frac{2\pi \cdot 27/3}{9\pi} = 2$$

12. Differentiering ger tangentplanets ekvation

$$2xz \, dx + x^2 \, dz + e^z \, dz = 2y \, dy$$

och i punkten $(1, 1, 0)$ gäller alltså $dz = dy$. Rikttningsderivata i t -riktningen betyder att $dx = 0.8dt$, $dy = 0.6dt$ varav $dz/dt = 0.6$.