

5B1105, Differential- och integralkalkyl I, del 2.

Tentamen, torsdag 7 juni 2007 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta. För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 14 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Här motsvarar skrivning 1–7 uppgift 1–7.

DEL A

- (3p) 1. Beräkna i punkten $x = \pi$, $y = 1/4$ värdet av de blandade andraderivatorna

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \text{då } z = \sqrt{2}x \sin xy$$

Inga sin eller cos i svaret, tack!

- (3p) 2. Bestäm maclaurinutvecklingen av

$$\sqrt{2}x \sin xy$$

till och med termer av grad sju (och då räknas till exempel x^3y^4 som grad sju).

- (3p) 3. Sök största värdet av uttrycket $4x + 3y$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 4$.

- (3p) 4. Beräkna volymen av den del av kuben $0 \leq x, y, z \leq 1$ som ligger utanför paraboloiden $z = x^2 + y^2$.

- (3p) 5. JAS Gripen flyger längs rymdkurvan

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \ln t \\ y = 2t \\ z = t^2 \end{array} \right\} 1 \leq t \leq e$$

Hur lång blev turen? (Håll ögonen öppna efter en jämn kvadrat!)

- (3p) 6. Beräkna kurvintegralen

$$\oint (\arctan x - y^3) dx + (x^3 + e^y) dy$$

ett varv i positiv led runt enhetscirkeln.

- (3p) 7. Har följande vektorfält en potential? Bestäm i så fall en sådan potential $\Phi(x, y, z)$ som dessutom har $\Phi(1, 1, 1) = 17$.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} yz \\ xz - 2y \\ xy \end{pmatrix}$$

- (3p) 8. Ett vektorfält definieras av $\mathbf{F} = \mathbf{grad}(x^2 + y^2 + z)$. Bestäm flödet ut ur enhetssfärens övre halva. (Flödet genom planet $z = 0$ ska inte räknas.)

DEL B

- (5p) 9. En paraboloidantenn har den buktiga ytan $z = x^2 + y^2$ men för att den ska bli lagom stor skär man av den med planet $x + y + z = 12$. Randen blir då en ellips. Din uppgift är att beräkna vilken punkt på ellipsen som ligger närmast origo och vilken som ligger längst från origo.

10. Vid ordinarie tentan för data hösten 2005 gavs ungefär följande uppgift:
(5p)

$$\text{Beräkna integraluttrycket } \int_0^\infty dy \int_{\sqrt{y}}^\infty e^{-x^3} dx$$

De flesta tentanderna gav då upp eftersom de inte kom på knepet.

Beräkna integraluttrycket!

11. Militärernas utspisningstält är ju format som en halvsfär med radien tre meter.
(5p) (Golvytan är alltså 9π kvadratmeter.) Beräkna tältets genomsnittshöjd!
- (5p) 12. Följande ekvation definierar z som implicit funktion av x och y .

$$x^2 z + e^z = y^2$$

Beräkna i punkten $(1, 1)$ funktionens riktningsderivata i den riktning som anges av vektorn $(3, 4)$.