Institutionen för matematik, KTH
Henrik Eriksson

SF1601 (5B1105), Differential- och integralkalkyl I, del 2.
LÖSNING TILL TENTAMEN, MÅNDAG 26 NOV 2007

DEL A

1.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2\sqrt{2}x\cos xy - \sqrt{2}x^2y\sin xy = 2\pi - \frac{\pi^2}{4}$$

2.

$$\frac{x+y}{1-x^2y} = (x+y)(1+x^2y+x^4y^2+\cdots) = x+y+x^3y+x^2y^2+x^5y^2+x^4y^3+\cdots$$

3. Derivatorna av Lagrangefunktionen $L = 4x - 3y + \lambda(x^2+y^2-4)$ ska vara noll.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4+2\lambda x = 0\,,\ \frac{\partial L}{\partial y} = -3+2\lambda y = 0 \ \Rightarrow 4y = -3x \text{ varav } x = 8/5,\ y = -6/5\,.$$

Maximivärdet blir alltså 10.

4.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{\sqrt{17}} \frac{1}{r^2} r\,dr = \pi\ln 17$$

5.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int xyz^2\,ds = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 t\cdot t\cdot t^2\sqrt{1+1+1}\,dt = \frac{1}{5}$$

6. Greens formel ger

$$\int\!\!\int (3x^2+3y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 3r^2\cdot r\,dr = 2\pi$$

7. Eftersom **div F** $= 2$ blir totala utflödet 2 gånger volymen, det vill säga $4\pi/3$. I xy-planet är den vertikala komponenten -1 och den ger utflödet π, så ut genom det buktiga taket strömmar $\pi/3$.

8. Gradienten är $(8,-6)$ och i dess motsatta riktning avlägsnar man sej snabbast från doftkällan. Normen för gradienten är 10, så doften avtar med 10 stank/meter. Man måste alltså gå 1,7 meter i riktningen (-4,3) som är västnordväst mot väst.

DEL B

9.

$$\frac{1}{\pi}\int\int\sqrt{x^2+y^2+1}\,dx\,dy = \frac{1}{\pi}\int\int\sqrt{1+r^2}\,r\,dr\,d\varphi = \frac{2}{3}\,(2\sqrt{2}-1) \approx 1.219$$

10. **div F** = **div rot G** = 0 så flödet ner genom tälttaket är lika med flödet ner genom enhetscirkeln.

$$\int\int e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\pi\int e^{-r^2}\,r\,dr = \pi\,(1-\frac{1}{e})$$

11. Omkastning av integrationsgränserna ger

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}\int_0^y dy = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

12. Derivatorna av Lagrangefunktionen $L = x^2+y^2+z^2+\lambda(xy-z)+\mu(x^2+y^2-z-1)$ ska bli noll.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x+\lambda y+2\mu x = 0\ ,\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y+\lambda x+2\mu y = 0\ ,\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z-\lambda-\mu = 0$$

Det blir två lösningar, maximiavståndet $\sqrt{3}$ uppstår i punkten $(1,-1,1)$ och minimiavståndet $\sqrt{7}/3$ i punkten $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/3)$.