Institutionen för matematik, KTH
Henrik Eriksson

SF1601 (5B1105), Differential- och integralkalkyl I, del 2.
Tentamen, måndag 26 nov 2007 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta. För betyg **E** krävs minst 15 poäng på A-delen. För betyg **D, C, B** resp **A** ska man dessutom ha minst 5, 9, 13, resp 16 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Här motsvarar skrivning 1–7 uppgift 1–7. Sex eller sju godkända skrivningar ger dessutom 2 eller 4 poäng på B-delen och varje skrivning med överbetyg ger en halvpoäng på B-delen.

DEL A

(3p) **1.** Beräkna i punkten $x = \pi$, $y = 1/4$ värdet av de blandade andraderivatorna

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \quad \text{då } z = \sqrt{2}\,x \sin xy$$

Inga sin eller cos i svaret, tack!

(3p) **2.** Bestäm maclaurinutvecklingen av

$$\frac{x+y}{1-x^2y}$$

till och med termer av grad sju (och då räknas till exempel x^3y^4 som grad sju).

(3p) **3.** Sök största värdet av uttrycket $4x - 3y$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 4$.

(3p) **4.** Ett vulkanberg beskrivs av

$$z = \frac{1}{x^2+y^2}, \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 17 ,$$

där kraterns radie är 1. Beräkna volymen mellan xy-planet och detta ytstycke.

(3p) **5.** En rätlinjig guldförande malmåder under Teknis sträcker sej från origo (Escapen) ner till punkten $(1, 1, -1)$. Guldhalten i punkten (x, y, z) är

$$\rho = xyz^2$$

Beräkna medelguldhalten på det räta linjestycket.

(3p) **6.** Beräkna kurvintegralen

$$\oint (\arctan x - y^3)\,dx + (x^3 + \cos y)\,dy$$

ett varv i positiv led runt cirkeln $x^2 + y^2 = 4$.

(3p) **7.** Beräkna utflödet genom den buktiga övre halvan av enhetssfären av vektorfältet

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x \sin y \\ -2yz + \cos y \\ z^2 + 2z - 1 \end{pmatrix}$$

(3p) **8.** Jag nås av en obehaglig doft med styrkan 17 stank. Varifrån kommer den? Om jag flyttar mej en meter åt öster ökar styrkan till 25 stank. Om jag i stället flyttar mej en meter norrut minskar den till 11 stank. Från vilket håll kommer doften och hur långt åt motsatt håll måste jag flytta mej för att doften ska gå ner till noll? (Du får förutsätta att linjär approximation duger.)

DEL B

(5p) **9.** G har anlagt en blomrabatt i enhetscirkeln och hängt upp en sollampa en meter ovanför origo. Hur långt har blommorna i genomsnitt till lampan? (Blomstren står tätt packade och en skylt bredvid anger *100% rabatt*).

(5p) **10.** Vädertjänsten har lovat en riktig rotblöta och med det menas att regnfältet **F** är **rot G** för något okänt fält **G**. Det blåser rejält, så **F** har ett komplicerat utseende, men just vid nerslaget i marken är regnet alltid vertikalt med styrkan

$$\mathbf{F} = (0,\ 0,\ -e^{-x^2-y^2}) \quad \text{om } z = 0$$

För att skydda sina späda blomster spänner G upp ett plasttält över enhetscirkeln. Tältet har en gång varit en halvsfär men är numera buckligt och tillplattat här och där. Beräkna vilket regnflöde som träffar plasttältet!

(5p) **11.** En teoretisk beräkning av hur mycket rabatten totalt kommer att imponera på omvärlden leder G till dubbelintegralen

$$\int_0^\infty dy \int_y^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

Medan G går in till datorn för att matlabba fram värdet räknar du ut det exakta svaret. Vad blir det?

(5p) **12.** För att skydda rabatten mot mördarsniglar har G grävt ner en gammal parabolantenn $z = x^2 + y^2 - 1$. Den går alltså en meter ner under origo och passerar jordytan i enhetscirkeln. Av estetiska skäl sågar inte G av den jäms med jordytan utan där parabolen skär sadelytan $z = xy$. Det blir då en vackert vågig skärningslinje och din uppgift är att bestämma dess största och minsta avstånd till origo.

Kursvärderingen på kurssidan avgör diffintkursens framtid. Dina klickningar behövs!

Välkommen till KTHs roligaste kurs **DA2190, Allmän bildning**, en kväll i veckan jan-mars 2008. Snabla Henrik E eller dyk upp på första träffen ons 23 jan 17-18 i E32.