Institutionen för matematik, KTH
Henrik Eriksson

SF1601 (5B1105), Differential- och integralkalkyl I, del 2.
LÖSNING TILL TENTAMEN, ONSDAG 4 JUNI 2008

DEL A

1. Differentiering ger tangentplanets ekvation

$$2x\,dx + 2y\,dy = 4z\,dz, \text{ alltså } \; 4dx + 6dy - 12dz = 0$$

Normalvektorn $(4, 6, -12)$ har längden $\sqrt{16 + 36 + 144} = 14$ så normalriktningen är $(2/7, 3/7, -6/7)$.

2.

$$e^{x+y^2} = e^x e^{y^2} = (1+x+x^2/2+x^3/6+x^4/24+x^5/120+\cdots)(1+y^2+y^4/2+\cdots) =$$

$$1+x+x^2/2+y^2+x^3/6+xy^2+x^4/24+x^2y^2/2+y^4/2+x^5/120+x^3y^2/6+xy^4/2+\cdots$$

3. Andragradsuttrycken $2x - x^2$ och $4y - y^2$ har maximum för $x = 1, y = 2$. Alltså finns maximum i punkten $(1, 2)$ där funktionsvärdet 5 och minimum i något av hörnen. Prövning visar att både origo och $(3, 3)$ ger minimivärdet 0.

4.

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1\,, \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}$$

Svaret blir alltså $\pi/2$.

5. Sträckan är $\sqrt{3}$, och med parametriseringen $x = t, y = t, z = -t, 0 \le t \le 1$ blir medelvärdet

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 t^2 t^3 t^4\,dt = \frac{1}{10\sqrt{3}}$$

6. Greens formel ger

$$\int\!\!\int (2 + \sin y - \sin y)\,dx\,dy = 2 \cdot \text{cirkelarean} = 18\pi$$

7. Eftersom $\mathbf{div}\ \mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$ blir totala utflödet

$$\int\!\!\int\!\!\int 3r^2\,r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{6\pi}{5}$$

8. Enligt formeln är arean

$$\int_0^\infty dx \int_0^{e^{-2x}} \sqrt{2+e^{-2x}}\,dy = \int_0^\infty e^{-2x}\sqrt{2+e^{-2x}}\,dx = \left\{2+e^{-2x}=t\right\} =$$

$$\int_3^2 -\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}/3$$

DEL B

9. Derivatorna av lagrangefunktionen $L = \pi r\sqrt{h^2+r^2} + \lambda(\pi r^2 h - 3/2)$ ska bli noll.

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \pi\sqrt{h^2+r^2} + \pi r^2/\sqrt{h^2+r^2} + \lambda 2\pi r h = 0\ ,\ \frac{\partial L}{\partial h} = \pi r h/\sqrt{h^2+r^2} + \lambda\pi r^2 = 0$$

Elimination av λ ger $h = r\sqrt{2}$

10. Kastar man om integrationsordningen får man

$$\int_0^\pi dx \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dy = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2$$

11. Vi räknar på en enhetssfär och använder rymdpolära koordinater.

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta \int_0^1 (1-r)\cdot r^2\,dr = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{12}$$

Dividera med volymen för att få medelvärdet 1/4. Medelavståndet är alltså en fjärdedel av radien (mindre än man skulle tro).

12. Greens formel ger

$$\int\int (1-2x^2-2y^2)\,dx\,dy = \int\int (1-2r^2) r\,dr\,d\varphi$$

Största värdet fås om man integrerar över cirkelytan $1-2r^2 \geq 0$, dvs ett varv runt origo längs cirkeln med radien $1/\sqrt{2}$.