Matematik, KTH
Henrik Eriksson

**SF1601 (5B1105), Differential- och integralkalkyl I, del 2.**
**Tentamen, onsdag 4 juni 2008 kl 8.00–13.00.**

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta. För betyg **E** krävs minst 15 poäng på A-delen. För betyg **D, C, B** resp **A** ska man dessutom ha minst 5, 9, 13, resp 16 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Här motsvarar skrivning 1–7 uppgift 1–7. Sex eller sju godkända skrivningar ger dessutom 2 eller 4 poäng på B-delen och varje skrivning med överbetyg ger en halvpoäng på B-delen.

## DEL A

(3p) **1.** Beräkna i punkten $x = 2$, $y = 3$, $z = 3$ en normalriktning till ytan

$$x^2 + y^2 + 5 = 2z^2$$

Riktningsvektorn bör ha längden 1.

(3p) **2.** Bestäm maclaurinutvecklingen av

$$e^{x+y^2}$$

till och med termer av grad fem (och då räknas till exempel $xy^4$ som grad fem).

(3p) **3.** Sök största och minsta värdet av uttrycket $2x + 4y - x^2 - y^2$ i triangeln med ett hörn i origo, ett i $(3, 3)$ och ett i $(0, 3)$.

(3p) **4.** Integrera uttrycket

$$\frac{e^{-x}}{1 + y^2}$$

över hela positiva kvadranten $0 \leq x, y < \infty$.

(3p) **5.** En rätlinjig nästan uttorkad källåder sträcker sej från Ugglevikskällan i origo ner till punkten $(1, 1, -1)$. Vattenhalten i punkten $(x, y, z)$ är

$$\rho = x^2 y^3 z^4$$

Beräkna medelvattenhalten på det räta linjestycket.

(3p) **6.** Beräkna kurvintegralen

$$\oint (\arctan x - \cos y)\, dx + (2x + x \sin y)\, dy$$

ett varv i positiv led runt cirkeln $x^2 + y^2 = 9$.

(3p) **7.** Beräkna totala utflödet ur övre hälften av enhetsklotet av vektorfältet

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

(3p) **8.** Beräkna arean av ytstycket $z = e^{-x} + y$ ovanför $0 \leq x < \infty,\ 0 \leq y \leq e^{-2x}$.

**DEL B**

(5p) **9.** Enligt EU-direktiv ska en glasstrut innehålla en och en halv deciliter glass, oräknat det som sticker upp ovanför konen. En glasstrut med höjden $h$ och mynningsradie $r$ har ju arean $\pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ och som glasstillverkare vill du minimera detta värde utan att bryta mot direktivet. Bestäm optimala strutproportioner, alltså det optimala förhållandet mellan $r$ och $h$.

(5p) **10.** Beräkna integralen

$$\int_0^\pi dy \int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx$$

(5p) **11.** Luftmolekylerna i en sfärisk ballong flyger omkring slumpmässigt. Ibland krockar dom med ballongens yta och det är det som håller ballongen utspänd. Hur långt är i genomsnitt kortaste avståndet till ballongens yta uttryckt i radien $r$?

(5p) **12.** En tromb har bildats utanför Lantmätarhuset där luften blåser i virvelströmmen

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2yx^2 - y \\ 1 - 2xy^2 \end{pmatrix} \quad .$$

I vilken sluten kurva runt origo gör vinden det största arbetet? Ledning: Greens formel och integrera sen över allt som är positivt.

Tentaresultatet kommer upp på kursens webbsida i morgon. //Henrik E