Institutionen för matematik, KTH
Henrik Eriksson

SF1601, Differential- och integralkalkyl I, del 2.
Lösning till tentamen, måndag 15 december 2008 kl 8.00–13.00.

DEL A

(3p) **1.** Beräkna i punkten $x = \pi/16$, $y = 4$ värdet av de blandade andraderivatorna

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \quad \text{då } z = \sqrt{2}\,y \sin xy$$

Eftersom $\partial z/\partial x = \sqrt{2}\,y^2 \cos xy$ får man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sqrt{2}\,(2y \cos xy - xy^2 \sin xy) = 8 - \pi$$

(3p) **2.** Bestäm maclaurinutvecklingen av

$$x \cos xy$$

till och med termer av grad nio.

Beta har utvecklingen för $\cos x$ och i den byter man x mot xy och får

$$x - \frac{x^3y^2}{2} + \frac{x^5y^4}{24} - \cdots$$

(3p) **3.** Sök största värdet av uttrycket $x + 2y$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 5$.

Sätts derivatorna lika med noll för uttrycket $x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$ får man

$1+2\lambda x = 0,\ 2+2\lambda y = 0 \ \Rightarrow y = 2x \ \Rightarrow x^2+4x^2 = 5 \ \Rightarrow x = \pm 1$

varav maxvärdet blir 5.

(3p) **4.** Beräkna volymen över triangeln i xy-planet med hörn i origo, (1,0) och (1,1) och under det buktiga taket $z = xy$. Väggarna är vertikala.

$$\int\int xy\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^x y\,dy = \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \frac{1}{8}$$

(3p) **5.** En satellit flyger ett varv längs rymdkurvan

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 4\sin t \end{array} \right\} 0 \le t \le 2\pi$$

Hur lång blev turen?

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} 5\,dt = 10\pi$$

(3p) **6.** Beräkna kurvintegralen $\oint (e^x - y^3)\, dx + (x^3 + \arctan y)\, dy$
ett varv i positiv led runt enhetscirkeln.

Greens formel ger oss en dubbelintegral över enhetscirkeln

$$\int\int 3(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int\int 3r^3\, dr\, d\varphi = \frac{3\pi}{2}$$

(3p) **7.** Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (y^2z^3,\ y^3 - \sin z,\ 4x^3y^2)$

ur en cylinder med höjden 1 och enhetscirkeln som basyta.

---

div F$= 3y^2$ ska integreras över cylindern.

$$\int\int 3y^2\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^1 3r^3 dr = \frac{3\pi}{4}$$

(3p) **8.** Ekvationen $z^3 + 2z - 3 = 0$ har lösningen $z = 1$, men om tvåan eller trean ersätts av andra tal är det svårt att lösa ut z. Man säger att ekvationen

$$z^3 + xz - y = 0$$

implicit definierar z som funktion av x och y.

a. Bestäm derivatorna $\partial z/\partial x$ och $\partial z/\partial y$ och deras värden när $x = 2$ och $y = 3$.

b. Använd det för att uppskatta lösningen z till ekvationen $z^3+1.95z-3.05 = 0$.

Derivera ekvationen med avseende på x och med avseende på y.

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial x} + z = 0$$

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0$$

I punkten $(2, 3, 1)$är alltså $\partial z/\partial x = -1/5$ och $\partial z/\partial y = 1/5$.

Med $dx = -0.05$ och $dy = 0.05$ får vi $dz = 0.05/5 + 0.05/5 = 0.02$ och alltså är det ändrade z-värdet ungefär 1.02.

DEL B

9. *Rymdlyssning*

(5p) Det berömda radioteleskopet i Baltimore, USA, har en uppåtriktad parabolantenn $z = x^2 + y^2$ snett avskuren av planet $z = x + 2y + 10$. Din uppgift är att beräkna lägsta och högsta punkten på randkurvan. Enheten är meter.

Enligt Lagrange bildar man

$$U = z + \lambda(x^2 + y^2 - z) + \mu(x + 2y + 10 - z)$$

och sätter man derivatorna till noll får man $y = 2x$ som ger två lösningar: högsta punkten $(2, 4, 20)$ och lägsta punkten $(-1, -2, 5)$.

---

10. *Rymdstrålning*

(5p) Värmestrålningen vid jordytan är $\mathbf{F}$=$\mathbf{grad}(y^3 - x^2 - z^2)$ i ett koordinatsystem där jorden är enhetsklot.

a. Hur stort är den totala värmeinflödet?

b. Vad blir alltså medelinflödet per ytenhet?

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -2x \\ 3y^2 \\ -2z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{divF} = 6y - 4$$

Integrerat över enhetsklotet ger $6y$ inget bidrag så integralen blir $-4V$. Inflödet blir alltså $4V = 16\pi/3$ och dividerat med arean 4π blir inflödet per ytenhet $4/3$.

---

11. *Rymdrymling*

(5p) Jordens tyngdkraft på en massa är enligt Newton

$$\mathbf{F} = -\frac{\text{konst.}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a. Bestäm konstanten genom att sätta in nordpolens koordinater $(0, 0, R)$ och se till att kraften blir mg nedåt.

b. Beräkna en potential Φ till $\mathbf{F}$.

c. Använd den till att kalkylera arbetet för att föra massan m från jordens yta oändligt långt bort i rymden.

d. En kanonkula kommer att fly jorden för gott om dess rörelseenergi $mv^2/2$ är större än detta arbete. Visa att rymlingshastigheten blir cirka 11 km/s.

Konstanten blir mgR^2 och potentialen

$$\Phi = \frac{-mgR^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Arbetet blir mgR och om det sätts lika med $mv^2/2$ får man $v = \sqrt{2gR} \approx \sqrt{20 \cdot 20000000/\pi} \approx 11000$.

---

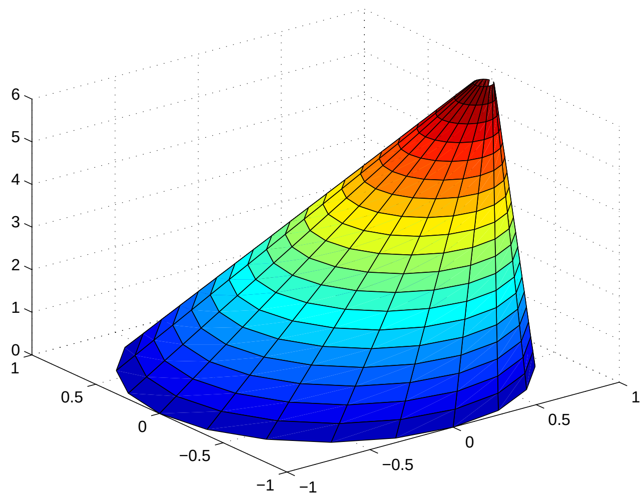
12. *Rymdstrutrymd*

(5p) På xy-planet står en stjärngossestrut med rymdstuk

$$z = 3\,\frac{1 - x^2 - y^2}{1 - x}\ .$$

a. Hur hög är den (i längdmåttet decimeter)?

b. Hur mycket rymmer den (i rymdmåttet liter)?



Sätts $y = 0$ blir $z = 3(1 + x)$ så struten är sex dm hög.
Om ekvationen skrivs om som

$$(x - \frac{z}{6})^2 + y^2 = (1 - \frac{z}{6})^2$$

ser man att varje horisontellt snitt är en cirkel med radien $1 - z/6$. Volymen blir alltså

$$\int_0^6 \pi(1 - \frac{z}{6})^2 \, dz = 2\pi$$

Man kan också lösa den vanliga volymsintegralen

$$3 \int\int \frac{1 - x^2 - y^2}{1 - x} \, dx \, dy = 3 \int\int (1 + x - \frac{y^2}{1 - x}) \, dx \, dy$$

När man integrerar en etta över enhetscirkeln får man arean π, när man integrerar ett x får man noll. Den sista termen kan integreras i y-led och när $(1-x)$ förkortats bort är resten lätt.