Institutionen för matematik, KTH
Henrik Eriksson

SF1601, Differential- och integralkalkyl I, del 2.
Tentamen, måndag 15 december 2008 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta. För betyg **E** krävs minst 15 poäng på A-delen. För betyg **D, C, B** resp **A** ska man dessutom ha minst 5, 9, 13, resp 16 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Här motsvarar skrivning 1–7 uppgift 1–7. Sex eller sju godkända skrivningar ger dessutom 2 eller 4 poäng på B-delen och varje skrivning med överbetyg ger en halvpoäng på B-delen.

DEL A

(3p) **1.** Beräkna i punkten $x = \pi/16$, $y = 4$ värdet av de blandade andraderivatorna

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \quad \text{då } z = \sqrt{2}\,y \sin xy$$

Inga sin eller cos i svaret, tack!

(3p) **2.** Bestäm maclaurinutvecklingen av

$$x \cos xy$$

till och med termer av grad nio (och då räknas till exempel x^3y^6 som grad nio).

(3p) **3.** Sök största värdet av uttrycket $x + 2y$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 5$.

(3p) **4.** Beräkna volymen över triangeln i xy-planet med hörn i origo, (1,0) och (1,1) och under det buktiga taket $z = xy$. Väggarna är vertikala.

(3p) **5.** En satellit flyger ett varv längs rymdkurvan

$$\left\{\begin{array}{l} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 4\sin t \end{array}\right\} 0 \le t \le 2\pi$$

Hur lång blev turen?

(3p) **6.** Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\oint (e^x - y^3)\,dx + (x^3 + \arctan y)\,dy$

ett varv i positiv led runt enhetscirkeln.

(3p) **7.** Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (y^2z^3,\ y^3 - \sin z,\ 4x^3y^2)$

ur en cylinder med höjden 1 och enhetscirkeln som basyta.

(3p) **8.** Ekvationen $z^3 + 2z - 3 = 0$ har lösningen $z = 1$, men om tvåan eller trean ersätts av andra tal är det svårt att lösa ut z. Man säger att ekvationen

$$z^3 + xz - y = 0$$

implicit definierar z som funktion av x och y.

a. Bestäm derivatorna $\partial z/\partial x$ och $\partial z/\partial y$ och deras värden när $x = 2$ och $y = 3$.

b. Använd det för att uppskatta lösningen z till ekvationen $z^3 + 1.95z - 3.05 = 0$.

DEL B

9. *Rymdlyssning*

(5p) Det berömda radioteleskopet i Baltimore, USA, har en uppåtriktad parabolantenn $z = x^2 + y^2$ snett avskuren av planet $z = x + 2y + 10$. Din uppgift är att beräkna lägsta och högsta punkten på randkurvan. Enheten är meter.

10. *Rymdstrålning*

(5p) Värmestrålningen vid jordytan är $\mathbf{F}=\mathbf{grad}(y^3 - x^2 - z^2)$ i ett koordinatsystem där jorden är enhetsklot.

a. Hur stort är den totala värmeinflödet?

b. Vad blir alltså medelinflödet per ytenhet?

11. *Rymdrymling*

(5p) Jordens tyngdkraft på en massa är enligt Newton

$$\mathbf{F} = -\frac{\text{konst.}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a. Bestäm konstanten genom att sätta in nordpolens koordinater $(0, 0, R)$ och se till att kraften blir mg nedåt.

b. Beräkna en potential Φ till $\mathbf{F}$.

c. Använd den till att kalkylera arbetet för att föra massan m från jordens yta oändligt långt bort i rymden.

d. En kanonkula kommer att fly jorden för gott om dess rörelseenergi $mv^2/2$ är större än detta arbete. Visa att rymlingshastigheten blir cirka 11 km/s.

12. *Rymdstrutrymd*

(5p) På xy-planet står en stjärngossestrut med rymdstuk

$$z = 3\,\frac{1 - x^2 - y^2}{1 - x} \ .$$

a. Hur hög är den (i längdmåttet decimeter)?

b. Hur mycket rymmer den (i rymdmåttet liter)?