Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

Förslag till lösningar, 5B 1106, Envariabel för F1.
Tentamen tisdag 29 mars 2005

1. Skriv $\sqrt{x^2+2x}-x=$

$$\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}.$$

   Vi bryter ut $x>0$ och förkortar: $\sqrt{x^2+2x}-x=2/(\sqrt{1+2/x}+1)$. Gränsvärdet blir $2/(1+1)=1$.

2. Kurvornas tangentlinjer är ortogonala precis då deras normaler är ortogonala. Normalen till nivåkurvan $f(x,y)=c$ ges av ∇f i punkten. I vårt fall måste vi kolla att $\nabla(x^3-3xy^2)$ och $\nabla(3x^2y-y^3)$ är ortogonala i punkten $(2,1)$. Nu är $\nabla(x^3-3xy^2)=(3x^2-3y^2,-6xy)=(a,-b)$ och $\nabla(3x^2y-y^3)=(6xy,3x^2-3y^2)=(b,a)$. Skalärprodukten blir $(a,-b)\cdot(b,a)=ab-ba=0$ i varje punkt.

3. Derivatan blir

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+(\sqrt{2x-1})^2}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{4x\sqrt{2x-1}}.$$

   Arcussinusfunktionen är bara definierad för $-1\le x\le 1$. Arcustangens är definierad överallt, men vi måste kräva att $2x-1\ge 0$, dvs $x\ge 1/2$. Alltså har f definitionsmängden $1/2\le x\le 1$.

4. Den givna funktionen är inte deriverbar i punkten $x=0$. Där antas värdet 0. Om $x\neq 0$ är $f'(x)=2x^{-1/3}-2$ som blir $=0$ endast i ändpunkten $x=1$.

   $f(1)=1$ och $f(-1)=5$, så det största värdet är 5 och det minsta är 0.

5. Gör variabelbytet $u=x^4$. Då blir $du=4x^3\,dx$ och vi får integralen

$$\frac{1}{4}\int_0^1\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{4}\left[\arctan u\right]_0^1=\frac{\pi}{16}.$$

6. Detta är Ex 5, kapitel 6.1 i Adams (sid 353 i femte upplagan). Man skall partialintegrera två gånger. Svaret blir $(5e^4-1)/32$.

7. a) Kalla seriens termer för a_n. Då är $a_n \geq 0$. Med $b_n = n^{-3/2}$ får vi $a_n/b_n \to 1$ då $n \to \infty$. Eftersom $\sum b_n$ konvergerar är även $\sum a_n$ konvergent.

   b) Kalla återigen seriens termer för $a_n \geq 0$. Med $b_n = 1/n$ finner man att $a_n/b_n \to 2$. Eftersom $\sum b_n$ divergerar gäller detta också $\sum a_n$.

8. Vi vet att $\sin t = t - t^3/3! +$h.o.t. (högre ordningens termer) för t nära 0. Med $t = x^4$ får vi $f(x) = \sin x^4 = x^4 - x^{12}/3! +$ h.o.t. Detta är Taylorutvecklingen av f kring $x = 0$. Vi vet att koefficienten för x^{12} är $f^{(12)}(0)/12!$, så $f^{(12)}(0) = -12!/3! = -2 \cdot 11!$.

9. Vi börjar med den homogena ekvationen $y'' - y = 0$. Dess karakteristiska ekvation är $r^2 - 1 = 0$, så $r = \pm 1$. Den allmänna homogena lösningen är därmed $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, där C_1 och C_2 är konstanter.

   För partikulärlösningen fungerar inte ansatsen $Ae^x + Bx$, eftersom e^x löser den homogena ekvationen. Vi ansätter i stället $y_p = Axe^x + Bx$. Då blir $y_p'' = A(x+2)e^x$, varför $y_p'' - y_p = 2Ae^x - Bx$. $A = 1/2$ och $B = 1$ ger den fullständiga lösningen **Svar:** $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x + x$.

10. Arean ges av

$$A = 2\pi \int_0^1 x\, ds = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{2\pi}{3}\left(2^{3/2} - 1\right).$$

11. Det finns punkter $a < b < c < d$ i intervallet, så att $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 0$. Enligt medelvärdessatsen finns a_1 mellan a och b, b_1 mellan b och c, samt c_1 mellan c och d så att $f' = 0$ i dessa punkter. Nu tillämpar vi medelvärdessatsen på f': det finns a_2 mellan a_1 och b_1 samt b_2 mellan b_1 och c_1 så att $f''(a_2) = f''(b_2) = 0$. Medelvärdessatsen använd på f'' ger slutligen en punkt a_3 mellan a_2 och b_2 med $f'''(a_3) = 0$.

12. Vi har $1 + y'^2 =$

$$1 + \left(x^5 - \frac{1}{4x^5}\right)^2 = 1 + x^{10} - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^{10}} = x^{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^{10}} = \left(x^5 + \frac{1}{4x^5}\right)^2,$$

   varför kurvans längd blir

$$\int_1^2 \sqrt{1+y'^2}\, dx = \int_1^2 \left(x^5 + \frac{1}{4x^5}\right) dx = \left[\frac{x^6}{6} - \frac{1}{16x^4}\right]_1^2 = \frac{21}{2} + \frac{15}{256} = \frac{2703}{256}.$$

13. a) Skriv $f(x) = \exp(\ln(x^{\sqrt{x}})) = e^{\sqrt{x}\ln x}$. Vi får

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}\ln x}(\sqrt{x}\ln x)' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = \frac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2).$$

b) Beräkningen ovan visar att $f'(x)$ har precis ett nollställe, nämligen $x = e^{-2} = c$ (där $\ln x + 2 = 0$). För $x > c$ är $f'(x) > 0$, varför funktionen är inverterbar för $c \leq x < \infty$.

c) Inversen g definieras genom att $g(y) = x$ precis då $f(x) = y$ (och $x \geq c$). Alltså är $\sqrt{g(y)} = \sqrt{x}$. Vidare gäller $\ln y = \ln f(x) = \sqrt{x}\ln x$ och $\ln\ln y = \ln(\sqrt{x}\ln x) = \ln\sqrt{x} + \ln\ln x = \frac{1}{2}\ln x + \ln\ln x$. Kvoten kan förenklas till

$$\frac{\sqrt{x}(\frac{1}{2}\ln x + \ln\ln x)}{\sqrt{x}\ln x} = \frac{1}{2} + \frac{\ln\ln x}{\ln x}.$$

Vi såg ovan att $f(x) = y \to \infty$ då $x \to \infty$, och tvärtom, eftersom f är inverterbar. Alltså gäller att $t = \ln x \to \infty$ då $y \to \infty$. Logaritmen växer saktare än varje positiv potens av t, så $\ln t/t \to 0$ då $t \to \infty$. Det följer att det sökta gränsvärdet är $1/2$.

14. a) Sätt $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Vi skall lösa ut x som funktion av y. Det gäller att $e^x - e^{-x} = 2y$, varav $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$. Detta är en andragradsekvation för $z = e^x$, nämligen $z^2 - 2yz - 1 = 0$, vilket ger $z = y + \sqrt{1+y^2}$. (Vi har förkastat roten $y - \sqrt{1+y^2}$ eftersom $z > 0$.) Från $e^x = y + \sqrt{1+y^2}$ följer nu $x = \ln(y + \sqrt{1+y^2}) = \sinh^{-1} y$.

b) $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ (med $z = e^x$), ger $y(z^2+1) = z^2 - 1$, varav $z^2(1-y) = 1+y$, så att $z^2 = \frac{1+y}{1-y}$. Det följer att $e^x = \sqrt{(1+y)/(1-y)}$. Logaritmering ger svaret $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = \tanh^{-1} y$.

15. Partialbråksuppdelning ger $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$. Härav följer

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+2)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) \to \frac{3}{4} \quad \text{då} \quad N \to \infty.\end{aligned}$$

Svaret är alltså $3/4$.

16. Detta är den rotationsvolym som uppstår då området $r \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ roteras kring x-axeln. Då måste $|x| \leq \sqrt{R^2 - r^2}$. Vi får

$$\begin{aligned}V &= 2\pi \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} (R^2 - x^2 - r^2)\, dx \\ &= 2\pi \left[(R^2 - r^2)x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{4\pi}{3}(R^2 - r^2)^{3/2}.\end{aligned}$$

17. Uttrycket innanför parentesen är

$$\frac{n}{4n^2-1^2}+\frac{n}{4n^2-2^2}+\frac{n}{4n^2-3^2}+.....+\frac{n}{4n^2-n^2}$$
$$=\left(\frac{1}{4-(1/n)^2}+\frac{1}{4-(2/n)^2}+\frac{1}{4-(3/n)^2}+.....+\frac{1}{4-(n/n)^2}\right)\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k,$$

om $f(x)=1/(4-x^2)$, $x_k=k/n$, $k=0,\ 1, ...,n$ och $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=1/n$. Detta är en Riemannsumma för integralen

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\right)\,dx=\frac{1}{4}\ln 3.$$

Vi vet att Riemannsumman konvergerar mot integralen, så svaret är $\ln 3/4$.