

Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1106, Envariabel för F1.

Tentamen tisdag 29 mars 2005, 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B). För godkänt (betyg tre) räcker det att uppnå 32 poäng (från del A och B). Den som har sju godkända lappskrivningar är också godkänd.

För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och har uppnått ett rimligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, uppgifter à 4 poäng.

Den som under hösten 2004 blivit godkänd på lappskrivning X, $1 \leq X \leq 7$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

1. Beräkna $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$.
2. Kurvorna $x^3 - 3xy^2 = 2$ och $3x^2y - y^3 = 3$ skär varandra i punkten $(2, 1)$. Visa att tangentlinjerna är vinkelräta.
3. Derivera $f(x) = \arcsin x + \arctan \sqrt{2x - 1}$ och ange f 's definitionsmängd.
4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$, $-1 \leq x \leq 1$.
5. Beräkna integralen $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx$.
6. Beräkna integralen $\int_1^e x^3 (\ln x)^2 dx$.
7. Avgör, med fullständig motivering, om serierna
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n^2+7}$ resp. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}-2}{2n^2-n+\sin^2 n}$
konvergerar eller divergerar.
8. Beräkna $f^{(12)}(0)$ då $f(x) = \sin x^4$.
9. Lös differentialekvationen $y'' - y = e^x - x$.
10. Beräkna arean av den yta som uppstår då parabeln $y = x^2/2$, $0 \leq x \leq 1$, roteras kring y -axeln.

Del B, uppgifter à 6 poäng:

11. Låt f vara tre gånger deriverbar i ett öppet intervall I och anta att f har minst fyra skilda nollställen i I . Visa att f''' har något nollställe i I .
12. Beräkna längden av kurvan

$$y = \frac{x^6}{6} + \frac{1}{16x^4}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

13. Låt $f(x) = x^{\sqrt{x}}$, $x > 0$.
- a) Beräkna derivatan av f .
- b) Bestäm c så att f blir inverterbar för $c \leq x < \infty$. Inversen betecknas g .
- c) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{g(y)} \ln \ln y}{\ln y}.$$

14. Låt $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ och $\tanh x = \sinh x / \cosh x$. Bestäm inverser till $\sinh x$ och $\tanh x$.

15. Bestäm summan av serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots$$

16. Beräkna volymen av den kropp som återstår då man genom centrum av ett klot med radien R borrar ett (cirkulärt) hål med radie $r < R$.

17. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4n^2 - 1} + \frac{n}{4n^2 - 4} + \frac{n}{4n^2 - 9} + \dots + \frac{n}{3n^2} \right).$$