Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

Förslag till lösningar, 5B 1106, Envariabel för F1.
Tentamen onsdag 24 augusti 2005

1. $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ visar att

$$f(x) = \frac{1}{x+3}, \quad x > 2, \qquad \text{och} \qquad f(x) = \frac{-1}{x+3}, \quad x < 2.$$

   Alltså är högergränsvärdet $+1/5$ och vänstergränsvärdet $-1/5$. Funktionen f är inte definierad i $x = 2$ (eller $x = -3$). Den är kontinuerlig i sin definitionsmängd.

   Eftersom gränsvärdena ovan är olika kan inte f utvidgas så att den blir kontinuerlig även för $x = 2$.

2. Låt $f(x,y) = 3xy^3 - x^2$. Tangentlinjens lutning fås genom att derivera ekvationen $f(x,y) = 2$ implicit. Vi får $3y^3 + 3x \cdot 3y^2y' - 2x = 0$. $x = 2$ och $y = 1$ ger $y' = 1/18$ i punkten. Normallinjen har därför lutning -18 i punkten.

   Svar: Ekvationen blir $y - 1 = -18(x-2)$.

3. Vi skall lösa ut x som funktion av y ur ekvationen $y = h(x)$. Då är $x = h^{-1}(y)$ den sökta inversen. Den givna ekvationen $y = 1-2f(3-4x)$ leder till $f(3-4x) = \frac{1}{2}(1-y)$. Tillämpa g på ekvationen. Vi får $3-4x = g(\frac{1}{2}(1-y))$ som ger $x = \frac{1}{4}(3 - g(\frac{1}{2}(1-y))) = h^{-1}(y)$.

4. Derivering ger $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$. De kritiska punkterna är $x = 0$ och $x = 2$. Derivera en gång till! Vi får $f''(x) = (2 - 2x - (2x - x^2))e^{-x} = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$.

   Svar: $f''(0) > 0$: lokalt minimum; $f''(2) < 0$: lokalt maximum.

5. Gör variabelbytet $u = \cos x$ och använd trigonometriska ettan. Integralen blir

$$\int \cos^2 x \sin^8 x \, du = \int (1-u^2)u^8 \, du = \frac{\cdot}{u^9}9 - \frac{u^{11}}{11} + C = \frac{\cos x^9}{9} - \frac{\cos x^{11}}{11} + C.$$

6. Man skall partialintegrera x-termen i integralen. Vi får

$$\int_0^1 x \arctan x \, dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 \arctan x\right]_0^1 - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[x^2 \arctan x - (x - \arctan x)\right]_0^1 = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}.$$

7. Vi skall använda formeln för den geometriska serien: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x/(1-x)$ om $|x| < 1$. Summan kan delas upp i två delar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} + 3\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + 4 = \frac{28}{3}.$$

8. Vi har $\sin t = t - \frac{1}{3}t^3 +$ termer av högre ordning. $t = x^4$ ger

$$\sin x^4 = x^4 - \tfrac{1}{3}x^{12} + \text{termer av högre ordning} = P_{12}(x) + R_{12}(x),$$

där P står för Taylor/MacLaurinpolynom och R restterm. Den enda term som finns av ordning ≤ 6 är x^4, så det sökta polynomet är $P_6(x) = x^4$.

9. Den sökta volymen blir

$$\int_0^1 \pi (x^2)^2 \, dx = \pi \left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

10. Vi börjar med den homogena ekvationen $y'' - y = 0$. Dess karakteristiska ekvation är $r^2 - 1 = 0$, så $r = \pm 1$. Den allmänna homogena lösningen är därmed $y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, där C_1 och C_2 är konstanter.

   För partikulärlösningen fungerar inte ansatsen $Ae^x + Bx$, eftersom e^x löser den homogena ekvationen. Vi ansätter i stället $y_p = Axe^x + Bx$. Då blir $y_p'' = A(x+2)e^x$, varför $y_p'' - y_p = 2Ae^x - Bx$. $A = 1/2$ och $B = -1$ ger den fullständiga lösningen **Svar:** $y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x - x$.

11. Nämnaren i integranden kan faktoriseras som $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, varför

$$\frac{x+4}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{7}{x-2} - \frac{6}{x-3}.$$

   Det följer att

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6}\, dx = \int \left(\frac{7}{x-2} - \frac{6}{x-3}\right) dx = 7\ln[x-2| - 6\ln|x-3| + C.$$

12. Sätt $f(x) = (1+x)^\alpha - (1+\alpha x)$. Då är $f(0) = 0$. Vi har

$$f'(x) = \alpha(1+x)^\alpha - \alpha = \alpha((1+x)^\alpha - 1).$$

Vi skall se att $x = 0$ är ett strikt lokalt minimum. Då följer påståendet: $f(x) > f(0) = 0$ om $-1 \leq x$ och $x \neq 0$.

I fallet $x > 0$ är $1 + x > 1$ och därmed $(1+x)^\alpha > 1$. Alltså är $f'(x) > 0$ i detta fall.

Vi visar nu att $f'(x) < 0$ för $-1 \leq x < 0$: då är, ju, $0 \leq 1 + x < 1$, vilket ger $(1+x)^\alpha < 1$. Saken är klar.

13. På det sökta intervallet måste f vara strängt växande eller strängt avtagande. Derivering ger

$$f'(x) = 5\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{4}{1+x^2} = \frac{9-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Derivatan växlar tecken vid $x = \pm 3$. För $-3 < x < 3$ är $f'(x) > 0$. Det följer att det sökta intervallet är $-3 \leq x \leq 3$.

14. Om $y = \cosh x$ är $y' = \sinh x > 0$ om $x > 0$. För $y = \coth x$ finner man $y' = -1/\sinh^2 x < 0$ om $x > 0$. Alltså är funktionerna inverterbara för $x \geq 0$.

a) Sätt $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Vi skall lösa ut x som funktion av y. Det gäller att $e^x + e^{-x} = 2y$, varav $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$. Detta är en andragradsekvation för $z = e^x$, nämligen $z^2 - 2yz + 1 = 0$, vilket ger $z = y + \sqrt{y^2-1}$. (Vi har förkastat roten $y - \sqrt{y^2-1}$ eftersom $z \geq 1$.) Från $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$ följer nu $x = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) = \cosh^{-1} y$, för $y \geq 1$.

b) $y = \coth x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{z^2+1}{z^2-1}$ (med $z = e^x$), ger $y(z^2-1) = z^2+1$, varav $z^2(1-y) = 1+y$, så att $z^2 = \frac{y+1}{y-1}$. Det följer att $e^x = \sqrt{(y+1)/(y-1)}$. Logaritmering ger svaret $x = \frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1} = \coth^{-1} y$.

15. Allmänt gäller att arean $= \int_a^b 2\pi|y|\,ds$, där $ds = (1+(y')^2)^{1/2}\,dx$.

Vi har $1 + y'^2 =$

$$1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = 1 + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} = x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} = \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2.$$

Den sökta arean blir

$$\int_1^2 2\pi(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}\ln x)(x + \tfrac{1}{4x})\,dx = \frac{\pi}{8}\int_1^2 \left(8x^3 + 2x - 4x\ln x - \frac{1}{x}\ln x\right)dx$$

Partialintegrering ger $\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$. Substitutionen $u = \ln x$ ger $\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = u^2/2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$. Alltså blir arean

$$A = \frac{\pi}{8}\left[2x^4 + x^2 - 2x^2 \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2 = \pi\left(\frac{9}{2} - \ln 2 - \frac{1}{16}(\ln 2)^2\right).$$

16. Uttrycket innanför parentesen är

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{4n^2+1^2} + \frac{n}{4n^2+2^2} + \frac{n}{4n^2+3^2} + \ldots\ldots + \frac{n}{4n^2+n^2} \\
&= \left(\frac{1}{4+(1/n)^2} + \frac{1}{4+(2/n)^2} + \frac{1}{4+(3/n)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{4+(n/n)^2}\right)\frac{1}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k,
\end{aligned}$$

om $f(x) = 1/(4+x^2)$, $x_k = k/n$, $k = 0,\, 1, \ldots\ldots, n$ och $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = 1/n$. Detta är en Riemannsumma för integralen

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{1+(\frac{x}{2})^2} = \left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}.$$

Riemannsumman konvergerar mot integralen, så svaret är $\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$.

17. Summan kan skrivas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

Vi beräknar partialsumman $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+3)}$ och låter sedan $N \to \infty$.

Partialbråksuppdelning ger $\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3})$. Härav följer

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+3)} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}\right) \\
&\quad \to \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18} \quad \text{då} \quad N \to \infty.
\end{aligned}$$

Svaret är alltså 11/18.