

Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1106, Envariabel för F1.

Tentamen onsdag 24 augusti 2005, 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B). För godkänt (betyg tre) räcker det att uppnå 32 poäng (från del A och B). Den som har sju godkända lappskrivningar är också godkänd.

För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och har uppnått ett rimligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, uppgifter à 4 poäng.

Den som under hösten 2004 blivit godkänd på lappskrivning X , $1 \leq X \leq 7$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften.

1. Beräkna höger- och vänstergränsvärden i punkten $x = 2$ av funktionen $f(x) = |x - 2|/(x^2 + x - 6)$. Är f kontinuerlig?
2. Bestäm normallinjen till kurvan $3xy^3 - x^2 = 2$ genom punkten $(2, 1)$.
3. f är inverterbar med invers funktion g . Använd g för att bestämma inversen till $h(x) = 1 - 2f(3 - 4x)$.
4. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till $f(x) = x^2 e^{-x}$.
5. Beräkna $\int \cos^3 x \sin^8 x \, dx$.
6. Beräkna integralen $\int_0^1 x \arctan x \, dx$.
7. Beräkna summan av serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^{n+1}}{4^n}$.
8. Bestäm MacLaurinutvecklingen av ordning sex till $f(x) = \sin x^4$.
9. Bestäm volymen av den solida kropp som uppstår vid rotation av området mellan kurvorna $y = x^2$, $y = 0$ och $x = 1$ kring x -axeln.
10. Lös differentialekvationen $y'' - y = x + e^x$.

Del B, uppgifter à 6 poäng:

11. Beräkna

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6} dx.$$

12. Låt $\alpha > 1$. Visa att $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ om $x > 0$ eller $-1 \leq x < 0$.

13. Bestäm det största intervall som innehåller punkten $x = 2$ och där funktionen

$$f(x) = \frac{5x}{1+x^2} + 4 \arctan x$$

är inverterbar.

14. Låt

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{och} \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

$\cosh x$ och $\coth x$ är inverterbara för $x \geq 0$ (varför?). Bestäm inverserna.

15. Beräkna arean av den mantelyta som uppstår då kurvan

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

roteras kring x -axeln.

16. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{4n^2+1} + \frac{n}{4n^2+4} + \frac{n}{4n^2+9} + \dots + \frac{n}{5n^2} \right).$$

17. Bestäm summan av serien

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots$$