Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1106, Envariabel för F1.
Tentamen måndag 19 december 2005, 8.00-13.00

Förslag till lösningar.
1. a) Exponenten är $\frac{3}{2}\ln 9 = \ln 9^{3/2} = \ln 3^3 = \ln 27$, varför $e^{(3\ln 9)/2} = e^{\ln 27} = 27$.

b) Eftersom $9 = 3^2$ kan högerledet skrivas $3^{2(1-x)}$. Vi får ekvationen $3^x = 3^{2(1-x)}$. Logaritmering med basen 3 ger ekvationen $x = 2(1-x)$, med lösning $x = 2/3$.

2. Derivera ekvationen implicit, med $y = y(x)$. Vi får $2x + y + xy' + 6y^2y' = 0$. Insättning av punkten ger $y'(-2) = \frac{3}{4}$. Linjens ekvation blir $y - 1 = \frac{3}{4}(x+2)$.

3. Inför hjälpfunktionen $f(x) = \tan x - x$. Vi har $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x > 0$ om $0 < x < \pi/2$. Alltså är $f(x) > f(0) = 0$ i detta intervall.

4. Bilda funktionen $f(x) = \arcsin x - \arctan(x/\sqrt{1-x^2})$. Derivera! Man finner att $f'(x) = 0$ i intervallet. Eftersom $f(0) = 0$ är funktionen 0 i hela intervallet, dvs $\arcsin x = \arctan(x/\sqrt{1-x^2})$ för $|x| < 1$. Man kan också visa detta med likformiga trianglar.

5. Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 16 = 0$, med rent imaginära rötter $\pm 4i$. Den allmänna lösningen är $y(x) = C_1\cos 4x + C_2 \sin 4x$. Då blir $y'(x) = -4C_1 \sin 4x + 4C_2 \cos 4x$. $x = 0$ ger $-6 = y(0) = C_1$ samt $32 = y'(0) = 4C_2$, varför

Svar: $y = -6\cos 4x + 8\sin 4x$.

6. Derivering ger $f'(x) = (x + \frac{x^2}{2}(-2x^2))e^{-2x^3/3} = x(1-x^3)e^{-2x^3/3}$. Ekvationen $1 - x^3 = 0$ har bara ett reellt nollställe: $x = 1$. Alltså är $x = 0$ och $x = 1$ de enda kritiska punkterna. $f''(x) = (1 - 4x^3 - (x - x^4)(-2x^2))e^{-2x^3/3}$. $f''(0) = 1 > 0$: lokalt minimum, medan $f''(1) = -4e^{-2/3} < 0$ är en lokal maxpunkt.

(Vi har $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to -\infty$. Vidare är $f(x) \geq 0$. Alltså antar f ett minsta värde 0, medan största värde saknas.)

7. Skriv $4 + x^2 = 4(1 + x^2/4) = 4(1 + (x/2)^2)$. Vi får

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+(x/2)^2} = [u = x/2] = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan u + C.$$

Alltså blir $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{4+x^2} = [\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}]_{-2}^{0} = -\frac{1}{2}\arctan(-1) = \pi/8$.

8. $y = x^2 - 2x$ är en "vanlig uppåtriktad" parabel och och $y = 6x - x^2$ är nedåtriktad. Det betyder att $6x - x^2$ är den övre och $x^2 - 2x$ den undre funktionen. Kurvorna skär varandra då $6x - x^2 = x^2 - 2x$, vilket ger $x = 0$ och $x = 4$. Arean blir

$$\int_0^4 (6x - x^2 - (x^2 - 2x))\,dx = \int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx = [4x^2 - \tfrac{2}{3}x^3]_0^4 = 64/3.$$

9. Tricket är att partialintegrera en etta:

$$\int 1 \cdot (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx$$
$$= x(\ln x)^2 - 2\int 1 \cdot \ln x\,dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2\int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$
$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C.$$

10. Rotation kring x-axeln ger volym $\int_1^2 \pi x^4\,dx = 31\pi/5$.
Rotation kring y-axeln ger volym $\int_1^2 2\pi x \cdot x^2\,dx = 15\pi/2$.
$15/2 > 31/5$, så rotation kring y-axeln ger störst volym.

11. Låt g beteckna gravitationskonstanten uttryckt i m/s^2. ($g \approx 9,81$.) Med $x(t)$ = positionen (=höjden) för ett föremål gäller, om accelerationen är konstant $= -g$, formeln

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + x_0 + \frac{v_0^2}{2g},$$

där x_0 är utgångspositionen och v_0 utgångshastigheten. Det senare uttrycket erhålles genom kvadratkomplettering. Vi ser att maxhöjden är $x_0 + \frac{v_0^2}{2g}$.

De givna förutsättningarna innebär att

$$x_0 + \frac{100}{2g} = \frac{400}{2g},$$

där x_0 är byggnadens höjd. Svaret blir $x_0 = 150/g \approx 15,3$ m.

12. $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, så $x = \pm 1$ är de enda kritiska punkterna. $f''(x) = 6x$, varför $f''(\pm 1) = \pm 6$, så $x = -1$ är ett lokalt maximum och $x = 1$ är ett lokalt minimum. Då $x \to \pm\infty$ gäller $f(x) \to \pm\infty$.

Det lokala minvärdet är $f(1) = -1$ och maxvärdet $f(-1) = 3$. Alla värden i intervallet $-1 < y < 3$ antas tre gånger. De lokala min- och maxvärdena -1 och 3 antas två gånger, medan övriga värden, dvs $y > 3$ och $y < -1$ antas en gång. Alltså gäller att 0 antas tre gånger, 3 antas två gånger och 4 antas en gång.

13. $y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, så $1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = (\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}))^2$.
Kurvans längd blir

$$\int_0^1 \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,dx = \left[\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2e}.$$

14. a) Täljarens gradtal är strikt mindre än nämnarens. Alltså kan integranden skrivas

$$\frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{Cx + D}{1 + x^2},$$

för några konstanter A, B, C, D.

b) Den primitiva funktionen blir

$$A \ln|1+x| - \frac{B}{1+x} + \frac{C}{2} \ln(1+x^2) + D \arctan x.$$

15. Formeln $1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ visar att serien är $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Eftersom $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (partialbråksuppdelning) blir partialsumman

$$s_n = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Vi får $s_n \to 2$ då $n \to \infty$.

16. Låt $|x| < 1$ och betrakta mer allmänt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = A + B.$$

Vi har

$$\frac{1}{x}B = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Samma resonemang för andraderivatan ger $x^{-2}A = 2/(1-x)^3$. Alltså gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$$

$x = 1/2$ ger svaret 6.

17. a) Binomialsatsen ger

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + ...$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{24}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) + ...$$

Detta uttryck växer med n eftersom alla termer $(1 - \frac{1}{n})$, $(1 - \frac{2}{n})$ osv. gör det.

b) Formeln visar att

$$a_n \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + ... \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + .. \leq 3$$

c) Enligt axiomet om övre gräns har varje växande, uppåt begränsad följd ett gränsvärde.