

Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1106, Envariabel för F1.

Tentamen måndag 19 december 2005, 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B). För godkänt (betyg tre) räcker det att uppnå totalt 32 poäng från lappskrivningar, max $4 \times 4 = 16$ poäng, samt från del A och B. För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och har uppnått ett rimligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, uppgifter à 4 poäng.

1. a) Förenkla uttrycket $e^{(3 \ln 9)/2}$.
b) Lös ekvationen $3^x = 9^{1-x}$.
2. Bestäm tangentlinjen till kurvan $x^2 + xy + 2y^3 = 4$ i punkten $(-2, 1)$.
3. Visa att $\tan x > x$ för $0 < x < \pi/2$.
4. Visa att $\arcsin x = \arctan(x/\sqrt{1-x^2})$ för $|x| < 1$.
5. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + 16y = 0$, $y(0) = -6$, $y'(0) = 32$.
6. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna för $f(x) = \frac{x^2}{2}e^{-2x^3/3}$.
7. Beräkna integralen $\int_{-2}^0 \frac{dx}{4+x^2}$.
8. Beräkna arean av det begränsade området mellan kurvorna $y = x^2 - 2x$ och $y = 6x - x^2$.
9. Bestäm en primitiv funktion till $(\ln x)^2$.
10. Kurvan $y = x^2$, $1 \leq x \leq 2$, roteras kring x - och y -axlarna. Vilken av rotationskropparna får störst volym?

Del B, uppgifter à 6 poäng:

11. En boll kastas med hastigheten 10 m/s uppåt från taket av en byggnad. En annan boll kastas uppåt med hastigheten 20 m/s, från marken. Båda bollarna uppnår samma maxhöjd. Hur hög är byggnaden?
12. Låt $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Hur många gånger antas värdena 0, 3 respektive 4?
13. Beräkna längden av kurvan $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $0 \leq x \leq 1$.
14. Man vill beräkna integralen

$$\int_a^b \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2(1+x^2)} dx.$$

Detta sker genom att partialbråksuppdelar integranden.

- a) Hur ser ansatsen ut?
 - b) Ange vilken form den primitiva funktionen till integranden har. Du behöver inte bestämma de konstanter som förekommer i del a).
15. Beräkna den oändliga serien

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots$$

Ledning: vad är $1 + 2 + \dots + n$?

16. Beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

17. a) Visa att talföljden $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ är växande.
b) Visa att följderna är uppåt begränsade.
c) Då existerar gränsvärdet $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Varför?