5B 1106, Envariabel för F1. Tentamen fredag 2 juni 2006
Förslag till lösningar.

1. Vi använder l'Hospitals regel:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x/(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

2. Derivera! $f'(x) = \frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right)$, så $f'(x) = 0$ endast då $x = 1/4$. För $0 < x < 1/4$ är $f'(x) > 0$ medan $f'(x) < 0$ för $x > 1/4$. **Slutsats:** lokalt maximum i $x = 1/4$.

3. Sätt $\arcsin 0,28 = \alpha \in (0, \pi/2)$. Då är $\sin\alpha = 0,28 = \frac{7}{25}$, så
$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25} \quad \text{och} \quad \tan\alpha = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}.$$
Alltså är $\arcsin 0,28 = \alpha = \arctan\frac{7}{24}$.

4. I båda fallen är $p = 1$ det "kritiska" värdet och båda integralerna divergerar för $p = 1$. För att få $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergent skall $p > 1$ medan $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerar då $p < 1$.

5. Partialintegrera:
$$\int_{-1}^{1} |x|e^x\,dx = 2\int_0^1 xe^x\,dx = 2\left[xe^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 1\cdot e^x\,dx = 2\left[(x-1)e^x\right]_0^1 = 2.$$

6. Vi får $y' = \frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$, så att $1+(y')^2 = 1+\frac{9}{4}(1+x) = \frac{1}{4}(13+9x)$. Kurvans längd blir $L = \int_0^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$
$$= \int_0^2 \frac{1}{2}\sqrt{13+9x}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3\cdot 9}(13+9x)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{1}{27}\left(31^{3/2} - 13^{3/2}\right).$$

7. Kurvorna skär varandra i $x = \pm 1/\sqrt{2}$ och $f(x) = 1-x^2$ ligger ovanför $g(x) = x^2$ för $|x| \le 1/\sqrt{2}$. Volymen blir
$$\pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (f(x)^2 - g(x)^2)\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2x^2)\,dx = 2\pi\left[x - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
som efter förenkling blir $2\sqrt{2}\pi/3$.

8. Bryt ut nämnaren och gör substitutionen $u = \ln x$:

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{1+\ln x}{x^2}}\,dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx = \int \sqrt{1+u}\,du$$
$$= \left[(1+u)^{3/2}\right] = \left[(1+\ln x)^{3/2}\right]_1^2 = (1+\ln 2)^{3/2} - 1.$$

9. $\cos t$ har MacLaurinutvecklingen $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + R_2$ där resttermen R_2 innehåller termer av ordning 3 och högre. $t = x^3$ ger $\cos x^3 = 1 - \frac{x^6}{2}$ plus termer av ordning 9 och högre. Det efterfrågade polynomet är därför $P_6(x) = 1 - \frac{x^6}{2}$.

10. Funktionen $f(x) = kx^2$ med $k > 0$ är *konvex*: grafen ligger alltid ovanför tangentlinjen. $g(x) = \ln x$ däremot är konkav, dess graf ligger överallt under tangentlinjen. Om k är stort skär kurvorna inte varandra. Om k är litet skär de varandra i två punkter. Det finns ett kritiskt värde på k där de båda kurvorna tangerar varandra. Vi skall först bestämma detta k.

    Tangentlinjen till parabeln har ekvation $y - ka^2 = 2ka(x-a)$ och den andra kurvans tangentlinje har då ekvationen $y - \ln a = \frac{1}{a}(x-a)$. Efter förenkling får vi

    $$y = 2akx - ka^2 \quad \text{resp.} \quad y = \frac{x}{a} + \ln a - 1, \quad a > 0,\ k > 0.$$

    Ekvationerna definierar samma linje om och endast om $2ka = 1/a$ och $\ln a - 1 = -ka^2$. Lösningen är ($a = \sqrt{e}$ och) $k = \frac{1}{2e}$.

    Vi sammanfattar: För $0 < k < \frac{1}{2e}$ finns två skärningspunkter, för $k = \frac{1}{2e}$ finns en och för $k > \frac{1}{2e}$ ingen skärningspunkt.

11. Vilkoret medför att vi kan hitta R så att $|f(x)/x| < 1$ om $|x| \geq R$. För $x \geq R$ gäller då $|f(x)| < x$, dvs $-x < f(x) < x$. Lägg till x. Vi får $2x > f(x) + x > 0$, så $f(x) + x > 0$ om $x \geq R$. Speciellt gäller detta för $x = R$. På samma sätt visar man att $f(x) + x < 0$ om $x \leq -R$. Satsen om mellanliggande värden ger nu att funktionen $f(x) + x$ har minst ett nollställe i intervallet $|x| < R$.

12. Vi bestämmer inversen: Lös ut x som funktion av y ur ekvationen $y = \frac{x-a}{bx-c}$. Vi får $y(bx-c) = x - a$, varav $x(by-1) = cy - a$, dvs

$x = \frac{cy-a}{by-1}$. Vi vill ha

$$\frac{cy-a}{by-1} = x = f(y) = \frac{y-a}{by-c}.$$

Villkoret är uppfyllt om $c = 1$ oberoende av a och b, eller om $c = -1$ och $a = b = 0$. Detta är de enda möjligheterna.

13. Vi bildar $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$. Notera att $f(-1) = \alpha - 1 > 0$ och $f(0) = 0$. Derivering ger $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$ och $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$. $f'(0) = 0$ och $f''(0) > 0$ så den enda kritiska punkten $x = 0$, är ett minimum. Det följer att $f(x) > 0$ först för $-1 < x < 0$ och $x > 0$, och enligt observationen ovan även för $x = -1$.

14. Det handlar om Riemannsummor för integralen $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$. Vi har delat in intervallet $[-1, 1]$ i $2n$ intervall av längd $\Delta x_j = \frac{1}{n}$. Med $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ blir den givna summan

$$\sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1-(j/n)^2} = \sum_{j=-n}^{n} f(x_j)\Delta x_j \to \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad n \to \infty.$$

Den erhållna integralen är arean mellan kurvan $y = \sqrt{1-x^2}$ och x-axeln, dvs halva enhetscirkeln, med area $\pi/2$. Det sökta gränsvärdet blir alltså $\pi/2$.

15. Integralkalkylens fundamentalsats ger

$$f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)(1+x^2)} \begin{cases} > 0 & \text{om} \quad -1 < x < 1, \\ = 0 & \text{om} \quad x = 1, \\ < 0 & \text{om} \quad x > 1. \end{cases}$$

Vi har en enda kritisk punkt, $x = 1$, som måste vara ett globalt maximum. Vi kan bestämma f genom att partialbråksuppdela integranden och därefter beräkna integralen. Vi får

$$\frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = ... = \frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t^2},$$

vilket leder till $f(x) =$

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \left[\ln(1+t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x = \ln\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Det största värdet är $f(1) = \frac{1}{2}\ln 2$. Vidare gäller att $f(x) \to -\infty$ då $x \to -1^+$. Värdemängden blir därför $-\infty < y \leq \frac{1}{2}\ln 2$.

16. $n = 0$ ger integralen $I_0 = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$. Låt $n > 0$. Variabelbytet $u = \ln x$ ger $du = x^{-1}dx$, varför partialintegrering leder till

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_1^\infty \frac{(\ln x)^n}{x^2}\,dx = \int_0^\infty u^n e^{-u}\,du \\
&= \left[-u^n e^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty n u^{n-1} e^{-u}\,du = nI_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Upprepning ger $I_n = n(n-1)I_{n-2} = ... = n(n-1)\cdots 1 \cdot I_0 = n!$.

17. Vi har $\frac{\pi}{4} \leq \arctan x < \frac{\pi}{2}$ då $x \geq 1$, varför

$$
\sum_{n=1}^\infty \left| \frac{\arctan n}{n} x^n \right| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{|x|^n}{n}
$$

som konvergerar precis då $|x| < 1$. Konvergensradien är $R = 1$, ty $\frac{1}{n}\arctan n|x|^n \to \infty$ då $n \to \infty$ om $|x| > 1$. Om $x = 1$ blir serien $\sum_{n=1}^\infty \frac{\arctan n}{n} \geq \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ som divergerar. Låt $a_n = \arctan n/n$. För $x = -1$ får vi den alternerande serien $-\sum_1^\infty (-1)^{n+1} a_n$. Serien konvergerar om a_n avtar med n. (Uppenbarligen gäller $a_n \geq 0$ och $a_n \to \infty$ då $n \to \infty$.)

Funktionen $f(x) = \arctan x/x$ har derivatan

$$
f'(x) = \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}.
$$

För $x > 1$ är täljaren

$$
< x - \frac{\pi}{4}(1+x^2) < x - \frac{3}{4}(1+x^2) = -\frac{3}{4}(x^2 - \frac{4}{3}x + 1) = -\frac{3}{4}((x-1)^2 + \frac{2}{3}x) < 0,
$$

så f avtar för $x \geq 1$. Alltså konvergerar serien också för $x = -1$. Konvergensintervallet blir $-1 \leq x < 1$.