

Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1106, Envariabel för F1.

Tentamen fredag 2 juni 2006, 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B). För godkänt (betyg tre) räcker det att, inklusive maximalt 16 bonuspoäng från lappskrivningar HT 2005, uppnå 32 poäng (från del A och B).

För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och har uppnått ett rimligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, uppgifter à 4 poäng.

1. Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x^2)}.$$

2. Bestäm och karakterisera eventuella lokala extrempunkter till funktionen $f(x) = \arctan \sqrt{x} - \ln(1 + x)$.

3. Visa att $\arcsin 0,28 = \arctan \frac{7}{24}$.

4. Ange för vilka reella tal p som de generaliserade integralerna $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ respektive $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ är konvergenta.

5. Beräkna

$$\int_{-1}^1 |x|e^x dx.$$

6. Beräkna längden av kurvan $y = (x + 1)^{3/2}$, $0 \leq x \leq 2$.

7. Beräkna volymen av den kropp som bildas när det ändliga området mellan kurvorna $y = 1 - x^2$ och $y = x^2$ roterar ett varv kring x -axeln.

8. Beräkna

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{1 + \ln x}{x^2}} dx.$$

9. Bestäm MacLaurinpolynomet av ordning sex till $f(x) = \cos x^3$.
10. Hur många rötter har ekvationen $\ln x = kx^2$ för olika värden av $k \geq 0$?

Del B, uppgifter à 6 poäng:

11. Låt f vara en kontinuerlig funktion på reella axeln, sådan att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Visa att funktionen $f(x) + x$ har minst ett nollställe.

12. För vilka reella tal a, b, c är funktionen

$$f(x) = \frac{x - a}{bx - c}$$

sin egen invers?

13. Låt $\alpha > 1$. Visa att $(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$ om $x > 0$ eller $-1 \leq x < 0$.
14. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 - (j/n)^2}.$$

15. Bestäm värdemängden till funktionen

$$f(x) = \int_0^x \frac{1 - t}{(1 + t)(1 + t^2)} dt, \quad x > -1.$$

16. Ange en rekursionsformel för

$$I_n = \int_1^\infty \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

och beräkna I_n med hjälp av formeln.

17. För vilka reella x -värden konvergerar potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n} x^n?$$