Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

Förslag till lösningar, Tentamen 5B 1106, Envariabel för F1. 18/12 2006

1. Eftersom $\cos x \to 1$ då $x \to 0$ är gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+t}}{1} = 1.$$

2. $y(2) = 6$ och $y' = x^3$, så $y'(2) = 8$.

   Tangentlinjen har ekvationen $y - 6 = 8(x-2)$.

   Normallinjen har ekvationen $y - 6 = -\frac{1}{8}(x-2)$.

3. Vi har
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+2x} = -\frac{2x^2-2x+1}{(1+x^2)(1+2x)}.$$
   Polynomet i täljaren har inga reella nollställen. Alltså saknar f kritiska punkter.

4. $f(x) = 1 - x^2$ för $0 \le x \le 1$ och $f(x) = x^2 - 1$ för $1 \le x \le 2$. Det finns inga kritiska punkter i det inre av intervallet $(0 < x < 2)$. I punkten $x = 1$ är inte f deriverbar (singulär punkt). $f(1) = 0$. Vi måste också kontrollera värdena i intervallets ändpunkter: $f(0) = 1$, $f(2) = 3$. Jämförelse ger

   största värdet är 3, minsta värdet är 0.

5. Karakteristiska ekvationen blir $r^2 - 3r + 2 = 0$ med lösning $r = 1$ och $r = 2$. Den allmänna homogena lösningen blir $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

   För partikulärlösningen gör vi ansatsen $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Vi får $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 2Ax^2 + (-6A+2B)x + 2A - 3B + 2C = x^2 + 1$ precis då $2A = 1$, $-6A + 2B = 0$ och $2A - 3B + 2C = 1$. Det ger $A = 1/2$, $B = 3/2$, $C = 9/4$, så $y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}$.

   Begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 1$ ger $C_1 + C_2 + \frac{9}{4} = 1 = C_1 + 2C_2 + \frac{3}{2}$, med lösning $C_1 = -2$, $C_2 = \frac{3}{4}$. Sammanfattningsvis:

$$\text{Lösningen är} \quad y = -2e^x + \frac{3}{4}e^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}.$$

6. Substitutionen $u = x^2 + 3$ ger integralen

$$\int_3^4 \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2}\, du = \left[-\frac{1}{2u}\right]_3^4 = \frac{1}{24}.$$

7. Partialintegrera en etta:

$$\int 1 \cdot \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

8. Anta mer generellt att kurvorna $y = f(x)$ och $y = g(x)$ skär varandra i punkterna a och b, och $f(x) > g(x)$ för $a < x < b$. Då området mellan kurvorna roteras kring x-axeln blir volymen av rotationskroppen
$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\, dx$.
Graferna till funktionerna $f(x) = 1 - x^2$ och $g(x) = x^2$ skär varandra då $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm a$, och $f(x) \geq g(x)$ då $-a \leq x \leq a$. Volymen blir därför

$$V = \pi \int_{-a}^{a} ((1-x^2)^2 - x^4)\, dx = 2\pi \int_0^a (1 - 2x^2)\, dx = \sqrt{2}\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

9. Vi skall använda att $1 + x + x^2 + ... = 1/(1-x)$ om $|x| < 1$. (Geometrisk serie.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + ... = \frac{2}{9}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + ...\right) = \frac{2}{9(1-\frac{2}{3})} = \frac{2}{3}.$$

10. Vi har $P_4(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{11}{24}x^4$ eftersom

$$\begin{aligned} e^x(1-x^2) &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + ...\right)(1-x^2) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 + ... \\ &= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{11}{24}x^4 + ... = P_4(x) + \text{restterm}, \end{aligned}$$

där resttermen är av ordning 5.

11. En allmän kommentar: utanför $x = 0$ har f derivator av varje ordning. Det gäller alltså att undersöka vad som händer i $x = 0$.

a) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \to 0 = f(0)$ då $x \to 0$ eftersom $|x^2 \sin \frac{1}{x}| \le x^2 \to 0$. Alltså är f kontinuerlig.

b) $\frac{1}{x}(f(x) - f(0) = x \sin \frac{1}{x}$ och $|x \sin \frac{1}{x}| \le |x| \to 0$ då $x \to 0$. Alltså är f deriverbar i $x = 0$ (vilket medför att f är kontinuerlig i $x = 0$) och $f'(0) = 0$.

Om $x \neq 0$ blir

$$f'(x) = 2x \sin \tfrac{1}{x} + x^2 (\cos \tfrac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \sin \tfrac{1}{x} - \cos \tfrac{1}{x}.$$

Här går den första termen mot 0 då $x \to 0$, men den andra termen, $-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, saknar gränsvärde då $x \to 0$. Alltså gäller att $\lim_{x\to 0} f'(x)$ inte existerar, så f' är inte kontinuerlig i $x = 0$.

12. Vi kan utan inskränkning anta att $f(0) = 0$ (annars, ersätt f med $f - f(0)$.)

a) Vi antar att $f^{(4)}(0) > 0$. (Fallet då $f^{(4)}(0) < 0$ får vi genom att ersätta f med $-f$.) Taylors formel ger $f(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)x^4 + R_5(x)$, där $R_5(x)$ är av ordning 5. Resttermen $R_5(x)$ går mot noll snabbare än $\frac{1}{4!} f^{(4)}(0)x^4$, då $x \to 0$. Det betyder att det finns $\delta > 0$ så att $f(x) \ge \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)x^4$ för $|x| < \delta$. Alltså är $f(x) > 0 = f(0)$ om $0 < |x| < \delta$, dvs f har ett lokalt minimum i $x = 0$.

Alternativt bevis av a) (varianter av det fungerar i b) och c)): Om $f^{(4)}(0) > 0$ gäller $f^{(4)}(x) > 0$ i något intervall kring $x = 0$. I detta intervall är f''' strängt växande. Eftersom $f'''(0) = 0$ gäller, för små x, att $f'''(x) < 0$ om $x < 0$ och $f'''(x) > 0$ för $x > 0$. Då är $f''(x) > 0$ för små $x \neq 0$. Alltså är f' växande nära $x = 0$ och $f'(0) = 0$ ger $f'(x) < 0$ för små $x < 0$ medan $f'(x) > 0$ för små $x > 0$. Men då har $f(x)$ ett lokalt minimum i $x = 0$.

b) Anta $f'''(0) > 0$? Taylors formel ger nu $f(x) = \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + R_4(x)$. Tredjeordningstermen dominerar över resttermen då $x \to 0$. Eftersom den förra är udda växlar den tecken kring $x = 0$. Det leder till att $f(x) > 0$ om $x > 0$ och litet, medan $f(x) < 0$ för små $x < 0$. Alltså har f inget extremvärde i $x = 0$.

c) Om den första nollskilda derivatan till f är av jämn ordning ≥ 2 så har f ett lokalt min resp. max då derivatan är > 0 resp. < 0. Om den första nollskilda derivatan är av udda ordning har f inte något lokalt extremvärde i $x = 0$.

13. Vi skall först bestämma och karakterisera de kritiska punkterna.

$f'(x) = 12x^3 + 48x^2 + 36x = 12(x^3 + 4x^2 + 3x) = 12x(x + 1)(x + 3)$.

De kritiska punkterna är $x = -3, -1, 0$. Vi beräknar f'' i dessa punkter och finner $f''(-3) > 0$, $f''(-1) < 0$ och $f''(0) > 0$: Lokalt maximum i $x = -1$, lokala minima i $x = -3$ och $x = 0$. $f(x) \to \infty$ då $x \to \pm\infty$. Vi har $f(-3) = -27$, globalt minimum; $f(-1) = 5$, $f(0) = 0$. Skisserar man nu funktionen finner man

$$\begin{aligned}
y < -27 &\quad \text{antas aldrig}, &\quad y = -27 &\quad \text{antas en gång}, \\
-27 < y < 0 &\quad \text{antas två gånger}, &\quad y = 0 &\quad \text{antas tre gånger}, \\
0 < y < 5 &\quad \text{antas fyra gånger}, &\quad y = 5 &\quad \text{antas tre gånger}, \\
y > 5 &\quad \text{antas två gånger}.
\end{aligned}$$

14. Vi har

$$1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16} = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right)^2,$$

varför kurvans längd är

$$L = \int_1^e \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right) dx = \left[\ln x + \frac{x^2}{8}\right]_1^e = 1 + \frac{1}{8}(e^2 - 1).$$

15. Vi påminner om att $\tan x$ har derivatan $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$. Det ger

$$\text{a)} \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) dx = \int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan x}\, dx = \ln|\tan x| + C,$$

och

$$\begin{aligned}
\text{b)} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\, dx &= \int \frac{\tan^2 x (\tan^2 x + 1)^2}{\cos^2 x}\, dx = [u = \tan x] = \int (u^6 + 2u^4 + u^2)\, du \\
&= \frac{1}{7}u^7 + \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{2}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C.
\end{aligned}$$

16. a) Problemet är att vi integrerar över ett oändligt intervall. Det räcker att visa att $\int_1^\infty \frac{1}{x^4+1}\, dx$ är konvergent, men det är klart eftersom integranden är positiv, $\leq \frac{1}{x^4}$ och $\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\, dx$ är konvergent. (Potensen i nämnaren är > 1.)

b) Ekvationen $x^4 + 1 = 0$ har 4 stycken icke-reella rötter. Vi kan därför faktorisera $x^4 + 1$ i en produkt av två andragradspolynom med reella koefficienter och icke-reella nollställen. Ansätt $x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$, där a och b skall bestämmas. Högerledet är $x^4 + (a+b)x^3 + (2+ab)x^2 + (a+b)x + 1$, så villkoren blir $a + b = 0$, $ab = -2$, med lösning $a, b = \pm\sqrt{2}$.

Från den allmänna teorin för partialbråksuppdelning vet vi därför att

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1},$$

där A, B, C, D är reella konstanter.

17. Byt variabel: $x = n + t$ ger

$$I_n = \frac{1}{e^n\sqrt{n}} \int_n^{n+1} e^x \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{e^n\sqrt{n}} \int_0^1 e^{n+t} \sqrt{n+t}\, dx = \int_0^1 e^t \sqrt{1 + \frac{t}{n}}\, dt.$$

Då gäller

$$e{-}1 = \int_0^1 e^t\, dt \le I_n \le \int_0^1 e^t \sqrt{1+\frac{1}{n}}\, dt = (e{-}1)\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to e{-}1, \quad n \to \infty.$$

Svar: Gränsvärdet existerar och har värdet $e - 1$.