

Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1106, Envariabel för F1.

Tentamen måndag 18 december 2006, 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B). För godkänt (betyg tre) räcker det att, inklusive maximalt 16 bonuspoäng från lappskrivningar HT 2006, uppnå 32 poäng (från del A och B).

För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och har uppnått ett rimligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, uppgifter à 4 poäng.

1. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\tan x}.$$

2. Bestäm ekvationer för tangent- och normallinjer till $y = \frac{1}{4}x^4 + 2$ i den punkt på kurvan där x -koordinaten är 2.
3. Bestäm och karakterisera eventuella lokala extrempunkter till funktionen $f(x) = \arctan x - \ln(1 + 2x)$.
4. Bestäm största och minsta värde av $f(x) = |x^2 - 1|$ om $0 \leq x \leq 2$.
5. Lös differentialekvationen $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1$ då $y(0) = y'(0) = 1$.
6. Beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 3)^2} dx.$$

7. Bestäm $\int \arcsin x \, dx$.
8. Beräkna volymen av den kropp som bildas när det ändliga området mellan kurvorna $y = 1 - x^2$ och $y = x^2$ roterar ett varv kring x -axeln.

9. Beräkna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^{k+1}}.$$

10. Bestäm MacLaurinpolynomet (Taylorpolynomet vid punkten 0) av ordning 4 till funktionen $f(x) = e^x(1 - x^2)$.

Del B, uppgifter à 6 poäng:

11. Låt $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 0$.

a) Visa att f är kontinuerlig.

b) Visa att f är deriverbar, men derivatan är inte kontinuerlig.

12. Anta att f är oändligt deriverbar och att $f'(0) = f''(0) = 0$.

a) Anta att också $f'''(0) = 0$, medan $f^{(4)}(0) \neq 0$. Visa att f har ett lokalt maximum (minimum) i $x = 0$ om $f^{(4)}(0) < 0$ ($f^{(4)}(0) > 0$).

b) Vad händer om $f'''(0) \neq 0$?

c) Hur ser det generella resultatet ut?

13. Låt $f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 18x^2$. Bestäm för alla reella y hur många gånger f antar värdet y .

14. Beräkna längden av kurvan $y = \ln x - \frac{1}{8}x^2$, $1 \leq x \leq e$.

15. Bestäm primitiva funktioner till

$$\text{a) } \tan x + \frac{1}{\tan x}, \quad \text{b) } \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}.$$

16. a) Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

är konvergent.

b) Ange ansats för att partialbråksuppdelar integranden. (Konstanterna behöver inte bestämmas.)

17. Undersök om gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n \sqrt{n}} \int_n^{n+1} e^x \sqrt{x} dx$$

existerar och beräkna det i så fall.