Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1106, Differential- och integralkalkyl II, del 1, envariabel, för F1.
Tentamen torsdag 31 maj 2007, 8.00-13.00

Förslag till lösningar.

1. Ange definitions- och värdemängderna till $f(x) = h(g(x))$ om $g(x) = x - 1$ och $h(x) = \sin\sqrt{x}$.

   Lösning: $f(x) = h(g(x)) = \sin\sqrt{g(x)} = \sin\sqrt{x-1}$.

   Här krävs att $x - 1 \geq 0$ och definitionsmängden är $x \geq 1$. Värdemängden blir densamma som för sinusfunktionen: $-1 \leq y \leq 1$.

2. Lös ekvationen $3 + \ln x = \ln\sqrt{x}$.

   Lösning: Vi har $\ln x - \ln\sqrt{x} = -3$ och vänsterledet är $\ln\frac{x}{\sqrt{x}} = \ln\sqrt{x}$. Exponentiering ger $\sqrt{x} = e^{-3}$ och kvadrering ger svaret $x = e^{-6}$.

3. Visa att $\arctan x < x$ om $x > 0$.

   Lösning: Bilda funktionen $f(x) = x - \arctan x$. Vi ska visa att $f(x) > 0$ för $x > 0$. Vi har $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0$ då $x > 0$. Det följer att $f(x) > f(0) = 0$ om $x > 0$. Saken är klar!

4. Approximera $\sqrt{102}$ med ett lämpligt första ordningens Taylorpolynom i punkten 100 och visa att felets absolutbelopp är $\leq 5 \cdot 10^{-4}$.

   Lösning: Tag $f(x) = \sqrt{100+x}$. Vi Taylorutvecklar f till grad 1: $f(x) = f(0) + xf'(0) + R_2$, där resttermen, dvs felet, kan skrivas $R_2 = \frac{x^2}{2}f''(t)$ med t mellan 0 och x. I vårt fall fås

$$f(x) = \sqrt{100+x} = 10 + x\frac{1}{2\sqrt{100}} - \frac{x^2}{8} \cdot \frac{1}{(100+t)^{3/2}}$$

   $x = 2$ ger $\sqrt{102} \approx 10,1$ och felet kan uppskattas med

$$|R_2| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(100+t)^{3/2}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(100)^{3/2}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-4}.$$

5. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 4y' + 5y = 8\cos x$.

   Lösning: Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 4r + 5 = 0$. Kvadratkomplettering ger $(r+2)^2 = -1$, varav $r = -2 \pm i$. Den allmänna lösningen till den *homogena ekvationen* är då $h = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. För partikulärlösningen gör vi ansatsen $p = A\sin x + B\cos x$. Insättning i ekvationen $p'' + 4p' + 5p = 8\cos x$ ger villkoren $A + B = 0$ och $A - B = 2$ varav $A = 1$, $B = -1$. Den allmänna lösningen till hela ekvationen är därför $y = h + p = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \sin x - \cos x$.

6. Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = (1-x)\sqrt{x+3}$.

   Lösning: Substitutionen $u = x + 3$ ger

$$\int (1-x)\sqrt{x+3}\,dx = \int (2-u)\sqrt{y}\,du$$
$$= 2\frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{5/2}}{5/2} + C = \frac{1}{3}(x+3)^{3/2} - \frac{2}{5}(x+3)^{5/2} + C.$$

7. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^3$ och $y = 2x^3 + x^2 - 2x$.

   Lösning: Låt $f(x) = x^3$ och $g(x) = 2x^3 + x^2 - 2x$. Skärningspunkter för de två kurvorna ges av $f(x) = g(x)$, dvs $x^3 + x^2 - 2x = 0$ med lösningar $-2, 0, 1$. Kontroll visar att $g(x) \geq f(x)$ för $-2 \leq x \leq 0$ medan $g(x) \leq f(x)$ för $0 \leq x \leq 1$. Arean blir därför

$$A = \int_{-2}^{0} (g(x) - f(x))\,dx + \int_{0}^{1} (f(x) - g(x))\,dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 2x)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{1} = \ldots = \frac{73}{12}.$$

8. Beräkna längden av kurvan $y = x^{3/2}$, $1 \leq x \leq 8$.

   Lösning: $1 + (y')^2 = 1 + \frac{9}{4}x$, varför längden blir

$$\int_1^8 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{19} \sqrt{u}\,du = \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{13/4}^{19} = \frac{8}{27}\left(19^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right).$$

9. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x - 1}$.

Lösning: Vi använder Maclaurinutvecklingarna $\sin t = t + O(t^2)$ och $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$, $t \to 0$. Det ger

$$\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x - 1} = \frac{(2x + O(x^2))^2}{1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + O(x^3)} = \frac{4x^2 + O(x^3)}{-2x^2 + O(x^3)} = \frac{2 + O(x)}{-1 + O(x)} \to -2,\ x \to 0.$$

10. Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{3^{3n}}\right)$.

Lösning: Vi skall använda att $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ $-1 < x < 1$ (geometrisk serie). Observera att

$$\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{(2^2)^n} = \frac{1}{4^n} \quad \text{och} \quad \frac{1}{3^{3n}} = \frac{1}{(3^3)^n} = \frac{1}{27^n}.$$

Vi får

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{3^{3n}}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{3^{3n}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} - \frac{1}{27^n}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1}{1-\frac{1}{27}} = \frac{23}{78}.\end{aligned}$$

11. a) Man vet att

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 9}{x - 2} = 4.$$

Bestäm

$$\lim_{x\to 2} f(x) \quad \text{och} \quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{f(x)} - 3}{x - 2}.$$

b) Är det sant att

$$\int \arcsin x\, dx = -\arccos x + C, \qquad \text{resp.} \qquad \int \cos x^2\, dx = \frac{\sin x^2}{2x} + C?$$

Motivera ordentligt!

Lösning: a) Gränsvärdeslagarna ger

$$\lim_{x\to 2}(f(x) - 9) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 9}{x - 2} \lim_{x\to 2}(x - 2) = 0,$$

dvs $f(x) \to 9$ då $x \to 2$. Vi antar att $f(2) = 9$.

Funktionen $\sqrt{f(x)}$ är definierad i något intervall kring $x = 2$. f är deriverbar i punkten och $f'(2) = 4$. Kedjeregeln ger nu

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{f(x)} - 3}{x - 2} = \left(\sqrt{f(x)}\right)'\Big|_{x=2} = \frac{1}{2\sqrt{f(2)}} f'(2) = \frac{4}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

b) Vi vet att $\arccos x$ har derivatan $-1/\sqrt{1-x^2}$. Den första identiteten säger därför $\arcsin x = -(\arccos x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$. $x = 0$ ger motsägelse.

Den andra identiteten säger att $\cos x^2$ är lika med

$$\left(\frac{\sin x^2}{2x}\right)' = \frac{\cos x^2 \cdot 2x \cdot 2x - \sin x^2 \cdot 2}{(2x)^2} = .. = \cos x^2 - \frac{\sin x^2}{2x^2},$$

vilket är nonsens. Slutsats: båda formlerna är falska!

12. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = x^2 e^{-x}$, $x \geq 1$.

Lösning: $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, så $f'(x) = 0$ då $x = 2$. ($x = 0$ tillhör inte intervallet.) Om $1 \leq x \leq 2$ gäller $f'(x) \geq 0$, dvs f växer. För $x \geq 2$ är $f'(x) \leq 0$, så f avtar. Alltså är $f(2) = 4e^{-2}$ ett lokalt maximum. $f(1) = 1/e$ och $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ visar att f:s värdemängd är $0 < y \leq 4e^{-2}$.

13. Låt $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$. Bestäm det största intervall som innehåller $x = 4$ och i vilket f är inverterbar.

Lösning: Vi skall studera funktionens derivata. Vi har $f'(x) = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 4(x-1)^3$, så $f(x) > 0$ för $x > 1$. På intervallet $x \geq 1$ är f är strängt (strikt) växande och därmed inverterbar. Uppenbarligen är det det största intervallet med denna egenskap. **Svar:** $x \geq 1$.

14. Vilken är den maximala arean av en rätvinklig triangel med omkrets 2?

Lösning: Låt $a, b > 0$ beteckna längden av katetrarna. Då gäller $a + b + \sqrt{a^2+b^2} = 2$, eller $\sqrt{a^2+b^2} = 2 - a - b$. Kvadrering och förenkling ger $ab - 2a - 2b + 2 = 0$, varför

$$b = \frac{2(1-a)}{2-a} \quad \text{varav } A = \frac{ab}{2} = \frac{a(1-a)}{2-a} = \frac{a-a^2}{2-a}.$$

Derivering ger

$$A' = \frac{(1-2a)(2-a) - (a-a^2)(-1)}{(2-a)^2} = ... = \frac{a^2 - 4a + 2}{(2-a)^2},$$

så derivatan är noll precis då $a^2 - 4a + 2$ vilket leder till $a = 2 - \sqrt{2}$ (den andra lösningen förkastas). Kontroll visar att b antar samma kritiska värde. I ändpunkterna $a = 0$ resp. $b = 0$ blir arean 0. Den kritiska punkten måste alltså vara ett maximum. Den *maximala arean* blir således $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

15. Bestäm en primitiv funktion till

$$\frac{1}{x^{1/3} + x^{1/2}}.$$

Lösning: Vi gör substitutionen $u = x^{1/6}$ så att $x^{1/3} = u^2$ och $x^{1/2} = u^3$. Då blir $x = u^6$, varför $dx = 6u^5\,du$. Alltså gäller

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^{1/3} + x^{1/2}} &= 6\int \frac{u^5\,du}{u^2 + u^3} = 6\int \frac{u^3\,du}{1 + u} = 6\int \frac{(t-1)^3\,dt}{t} \\
&= 6\int \frac{1}{t}(t^3 - 3t^2 + 3t - 1)\,dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 3t - \ln|t|\right) + C \\
&= 2(u+1)^3 - 9(u+1)^2 + 18(u+1) - \ln|u+1| + C, \text{ där } u = x^{1/6}.
\end{aligned}$$

16. a) Låt $x = \tan t/2$. Härled formlerna

$$\cos t = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad \sin t = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad dt = \frac{2}{1 + x^2}\,dx.$$

b) Man vet att $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{1}{4}(\ln 2 + 1)$. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos t}{1 + \sin t}\,dt.$$

Lösning: a) Se läroboken.

b) Vi använder formlerna i a) och får

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos t}{1 + \sin t}\,dt &= \int_0^1 \frac{1 + \frac{1-x^2}{1+x^2}}{1 + \frac{2x}{1+x^2}} \cdot \frac{2\,dx}{1 + x^2} \\
&= \int_0^1 \frac{2(1 + x^2 + 1 - x^2)}{(1 + x^2)(1 + x^2 + 2x)}\,dx = 4\int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + x)^2} = \ln 2 + 1
\end{aligned}$$

enligt förutsättningen.

17. Givet en konvergent serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n > 0$ för $n = 1, 2, ...$ Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right)$$

också är konvergent.

Lösning: Skriv $f(x) = \sin x$. Maclaurin ger en punkt t mellan 0 och x så att

$$1 - \frac{\sin x}{x} = \frac{x - \sin x}{x} = \frac{x - \left(x + \frac{1}{2}x^2 f''(t)\right)}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 \sin t}{x} = \frac{1}{2} x \sin t.$$

Det följer att $|1 - \frac{\sin x}{x}| \leq \frac{1}{2}|x|$, varför $|1 - \frac{\sin a_n}{a_n}| \leq \frac{1}{2}|a_n| = \frac{1}{2}a_n$. Konvergensen av serien $\sum a_n$ ger alltså att serien $\sum(1 - \frac{\sin a_n}{a_n})$ är absolutkonvergent, och därmed konvergent.