

Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

**5B 1106, Differential- och integralkalkyl II, del 1, envariabel, för F1.
Tentamen torsdag 31 maj 2007, 8.00-13.00**

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B). För godkänt (betyg tre) räcker det att, inklusive maximalt 16 bonuspoäng från lappskrivningar HT 2006, uppnå 32 poäng (från del A och B).

För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och dessutom har uppnått ett tillräckligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, tio uppgifter à 4 poäng.

1. Ange definitions- och värdemängderna till $f(x) = h(g(x))$ om $g(x) = x - 1$ och $h(x) = \sin \sqrt{x}$.
2. Lös ekvationen $3 + \ln x = \ln \sqrt{x}$.
3. Visa att $\arctan x < x$ om $x > 0$.
4. Approximera $\sqrt{102}$ med ett lämpligt första ordningens Taylorpolynom i punkten 100 och visa att felets absolutbelopp är $\leq 5 \cdot 10^{-4}$.
5. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y'' + 4y' + 5y = 8 \cos x$.
6. Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = (1 - x)\sqrt{x + 3}$.
7. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^3$ och $y = 2x^3 + x^2 - 2x$.
8. Beräkna längden av kurvan $y = x^{3/2}$, $1 \leq x \leq 8$.
9. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x - 1}$.
10. Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{3^{3n}} \right)$.

Del B, sju uppgifter à 6 poäng:

11. a) Man vet att

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 9}{x - 2} = 4.$$

Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{och} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x)} - 3}{x - 2}.$$

- b) Är det sant att

$$\int \arcsin x \, dx = -\arccos x + C, \quad \text{resp.} \quad \int \cos x^2 \, dx = \frac{\sin x^2}{2x} + C?$$

Motivera ordentligt!

12. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = x^2 e^{-x}$, $x \geq 1$.
13. Låt $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$. Bestäm det största intervall som innehåller $x = 4$ och i vilket f är inverterbar.
14. Vilken är den maximala arean av en rätvinklig triangel med omkrets 2?
15. Bestäm en primitiv funktion till

$$\frac{1}{x^{1/3} + x^{1/2}}.$$

16. a) Låt $x = \tan t/2$. Härled formlerna

$$\cos t = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad \sin t = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad dt = \frac{2}{1 + x^2} dx.$$

- b) Man vet att $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x)^2} = \frac{1}{4}(\ln 2 + 1)$. Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos t}{1 + \sin t} dt.$$

17. Givet en konvergent serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ där $a_n > 0$ för $n = 1, 2, \dots$. Visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right)$$

också är konvergent.