KTH Matematik
Examinator: Lars Filipsson

Lösningsförslag till Tentamen i SF1602 för CFATE 1

den 20 december 2008 kl 8-13

Preliminära betygsgränser: A - 28 poäng varav minst 8 VG-poäng, B - 25 poäng varav minst 5 VG-poäng, C - 21 poäng varav minst 2 VG-poäng, D - 18 poäng, E - 17 poäng. FX - 15 poäng.

Del A

1. **Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x + 2\sin x}{x+3x^2}$.**

Lösning: Vi har att $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x + 2\sin x}{x+3x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x + 2\frac{\sin x}{x}}{1+3x} = 3.$

Svar: 3

2. **Låt $f(x) = x^2e^{-2x}$. Bestäm samtliga lokala extrempunkter till f och skissa kurvan i stora drag.**

Lösning: Vi ser att funktionen är definierad för alla rella x, och att $f'(x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x} = 2x(1-x)e^{-x}$ existerar för alla x. De kritiska punkterna, när derivatan är noll, är $x = 0$ och $x = 1$. Om $x < 0$ är derivatan negativ, om $0 < x < 1$ är derivatan positiv, om $x > 1$ så är derivatan negativ. Det följer att funktionen avtar strängt på intervallet $x < 0$, är strängt växande på intervallet $0 < x < 1$ och är strängt avtagande på intervallet $x > 1$. Vi ser att funktionen har två lokala extrempunkter, ett lokalt min i $x = 0$ (minvärdet är 0) och ett lokalt max i $x = 1$ (det lolala maxvärdet är $1/e^2$). För att rita kurvan återstår nu att räkna ut två gränsvärden, $lim_{x\to-\infty}f(x) = \infty$ och $lim_{x\to\infty}f(x) = 0$. Skissa så kurvan.

3. **Beräkna integralen $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$ med hjälp av variabelsubstitution.**

Lösning: Vi gör variabelsubstitutionen $\{\ln x = u,\ dx/x = du,\ x = 2 \implies u = \ln 2,\ x = 3 \implies u = \ln 3\}$ och får med hjälp av den att

$$\int_2^3 \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{u^2}\,du = [-1/u]_{\ln 2}^{\ln 3} = 1/\ln 2 - 1/\ln 3.$$

SVar: $1/\ln 2 - 1/\ln 3$

Del B

4. **Låt f vara kontinuerlig och positiv på intervallet $[a, b]$.**

A. Härled formeln $V = \pi \displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,dx$ för beräkning av den rotationsvolym som uppstår när ytan mellan x-axeln och kurvan $y = f(x)$ roterar ett varv runt x-axeln.

B. Använd sedan denna formel för att visa att volymen av ett klot med radie r fås som $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Uppgift B får lösas även om man inte har löst uppgift A.

Lösning: A. Dela in intervallet $[a, b]$ i n delintervall. Den volym som skärs ut när kurvan på delintervall j roterar, dvs den del av kurvan som ligger mellan delningspunkterna x_{j-1} och x_j, har volym ungefär $\pi f(x_j)^2 \Delta x_j$ och hela kroppen får då en volym som är summan av dessa bitar, dvs $\sum_{j=1}^{n} \pi f(x_j)^2 \Delta x_j$. Detta är en Riemannsumma och eftersom den funktion vi har i Riemannsumman är kontinuerlig på $[a, b]$ så får vi konvergens vid obegränsat förfinad indelning mot $\pi \displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,dx$ som ger volymen för rotationskroppen.

B. Klotet med radie r kan fås som den rotationskropp som uppstår när området mellan x-axeln och halvcirkeln $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \le x \le r$, roterar runt x-axeln. Vi får volymen med hjälp av den formel vi härledde i A som $V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 4\pi r^3/3$.

5. **Antar funktionen $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{1}{2}\arctan x$ något största respektive minsta värde? Bestäm i förekommande fall dessa.**

Lösning: Funktionen är definierad och kontinuerlig för alla x. Derivatan $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{3 - x^2}{(1 + x^2)^2}$. Vi ser att derivatan är noll för $x = \pm\sqrt{3}$. Teckenstudium av derivatan ger att derivatan är negativ om $x < -\sqrt{3}$, derviatan är positiv om $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, derivatan är negativ om $x > \sqrt{3}$. Det följer att funktionen är strängt avtagande på intervallet $x < -\sqrt{3}$, funktionen är strängt växande på intervallet $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ och funktionen är strängt avtagande på intervallet $x > \sqrt{3}$. Eftersom dessutom

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi/4$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pi/4$ ser vi att funktionen har både största och minsta värde. Funktionens största värde är $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}/4 + \pi/6$ och funktionens minsta värde är $f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}/4 - \pi/6$.

Svar: Funktionens största värde är $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}/4 + \pi/6$ och funktionens minsta värde är $f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}/4 - \pi/6$.

6. **Bestäm Maclaurin-polynomet (Taylorpolynomet vid origo alltså) av grad 2 till funktionen $f(x) = \sqrt{x+100}$. Avgör sedan om det är möjligt att beräkna ett närmevärde med tre korrekta decimaler till $\sqrt{104}$ med hjälp av detta Maclaurin-polynom. Om det är möjligt, gör det.**

Lösning: Vi deriverar och räknar ut funktionens och dess derivators värden i origo och får Maclaurinpolynomet $p(x) = 10 + \dfrac{x}{20} - \dfrac{x^2}{8000}$. Ett närmevärde till $\sqrt{104}$ får vi om vi sätter in $x = 4$ i detta polynom. Närmevärdet blir $p(4) = 10,198$. Felet får vi med hjälp resstermen i Taylors formel till $f^{(3)}(c) \cdot 4^3/3!$ för något tal c mellan 0 och 4. Eftersom $f^{(3)}(x) = (3/8)(x+100)^{-5/2}$ ser vi att absolutbeloppet av felet är störst om $c = 0$, så absolutbeloppet av felet är mindre än $(3/8)(100)^{-5/2} \cdot 64/3! < 4/100000 = 0,00004$. De tre decimalerna var alltså korrekta.

Svar: Ett närmevärde med tre korrekta decimaler till $\sqrt{104}$ är $10,198$

7. ¨**Bestäm ekvationer för tangent och normal till kurvan $x^2 + y^4 = 5$ i punkten $(-2, 1)$.**

Lösning: Vi deriverar implicit och får $2x + 4y^3(x) \cdot y'(x) = 0$ vilket i den aktuella punkten betyder att $-4 + 4y'(-2) = 0$. Med andra ord är $y'(-2) = 1$. En ekvation för tangenten är därför $y = x + 3$ och en ekvation för normalen är $y = -x - 1$.

Svar: Tangent: $y = x + 3$, Normal: $y = -x - 1$.

Del C

8. Vid urladdning av en kondensator med kapacitansen C över en resistor med resistansen R gäller för spänningen u vid tiden t att $u = -RC\dfrac{du}{dt}$. Om spänningen vid tiden 0 är E – avgör vid vilken tidpunkt t spänningen har gått ner till hälften.

Lösning: Vi har diffekvationen $u' + \dfrac{1}{RC}u = 0$ som är en homogen diffekvation av första ordningen med konstanta koefficienter. Den allmänna lösningen är $u = Ce^{-t/RC}$, där C är en godtycklig konstant. Villkoret $u(0) = E$ ger att $C = E$.

Vår lösning är alltså $u = Ee^{-t/RC}$. Vi ser att detta är lika med $E/2$ precis när $e^{-t/RC} = 1/2$ dvs när $t = RC \ln 2$.

Svar: $t = RC \ln 2$.

9. En tank som rymmer 10 kubikmeter fylls på med avloppsslam i en takt som varierar med tiden. Närmare bestämt: man räknar med att vid tidpunkten t fylls slam på i en takt av $\dfrac{10}{t^2+4}$ kubikmeter per timme. Tanken är från början tom. Kommer den att svämma över?

Lösning: Låt oss räkna på vad som händer när tiden varierar mellan 0 och ett ganska stort tal R timmar. Vi delar in tidsintervallet i n delintervall, på varje sådant delintervall antar vi att påfyllningstakten är ungefär konstant. Så i tidsintervallet mellan t_{j-1} och t_j är påfyllningstakten ungefär konstant $10/(t_j^2+4)$ kubikmeter per timme. Om detta tidsintervall är Δt_j timmar långt så betyder det att det fylls på $\dfrac{10}{t_j^2+4}\Delta t_j$ kubikmeter under tidsintervallet. Totalt mellan klockan 0 och klockan R fylls det alltså på ungefär $\sum_{j=1}^{n} \frac{10}{t_j^2+4}\Delta t_j$ kubikmeter. Det här en Riemannsumma för en kontinuerlig funktion, vid obegränsat förfinad indelning får vi konvergens mot integralen $\displaystyle\int_0^R \frac{10}{t^2+4}\,dt = \frac{5}{2}\int_0^R \frac{1}{(t/2)^2+1}\,dt = 5\arctan(R/2)$ som alltså ger den totala mängden slam som har fyllts i tanken fram till klockan R. Om vi nu låter R gå mot oändligheten ser vi att gränsvärdet blir $5\pi/2$ vilket är mindre än 10. Tanken svämmar alltså inte över.

Svar: Nej.

10. Avgör om det är sant att $\displaystyle 1 \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1} \leq 2$.

Lösning: Eftersom $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = 1 - 1/3 + 1/2 - 1/4 + 1/3 - 1/5 + 1/4 - 1/6 + \ldots$ ser vi att alla termer utom två tar ut varandra. Seriens summa är alltså $1 + 1/2 = 3/2$ och eftersom detta helt klart ligger mellan 1 och 2 har vi löst uppgiften. (Den går också att lösa med integraluppskattning)

11. Från en ort Alvestad går en rak motorväg norrut till en ort Benhammar belägen 40 km från Alvestad. En sovstad Vesjön växer upp 4 km rakt öster om motorvägen, mer precist rakt österut från en punkt på motorvägen belägen 24 km norr om Alvestad och 16 km söder om Benhammar. En trafikundersökning visar att invånarna i Vesjön besöker Alvestad dubbelt så ofta som Benhammar. Hur ska en anslutningsväg från Vesjön till motorvägen byggas för att invånarnas totala bensinförbrukning vid färd till Alvestad och Benhammar ska bli så liten som möjligt?

medskip
Lösning: Vi antar att bensinförbrukningen är proportionell mot körsträckan, och så försöker vi minimera den. Eftersom invånarna i Vesjön ska köra dubbelt så mycket till Alvestad som till Benhammar så försöker vi minimera körsträckan vid två körningar till Alvestad och en körning till Benhammar. Om vi lägger anslutningspunkten på motorvägen vid x så ska vi minimera funktionen

$$f(x) = 2(\sqrt{16 + x^2} + 24 - x) + \sqrt{16 + x^2} + x + 16$$

för x mellan -16 och 24. Eftersom funktionen är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet har vi att ett minimum existerar och att det antas i en punkt där derivatan är noll, en punkt där derivata saknas eller en ändpunkt till intervallet. Vi deriverar och får

$$f'(x) = 2(\frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} - 1) + \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} + 1$$

som existerar för alla x i intervallet. Genom bråkräkning ser vi att derivatan är noll om och endast om $x = \sqrt{2}$. Vi jämför nu funktionsvärdena i de aktuella punkterna och får att minimum inträffar när $x = \sqrt{2}$. Anslutningspunkten ska alltså läggas på motorvägen vid en punkt som ligger $24 - \sqrt{2}$ km norr om Alvestad.

Svar: Anslutningspunkten ska läggas $24 - \sqrt{2}$ km norr om Alvestad.