

KTH Matematik
Examinator: Lars Filipsson

Tentamen i SF1602 för CFATE 1
den 20 december 2008 kl 8-13

Uppgifterna 1-3, Del A, svarar mot varsin ks och ska bara lösas om man inte är godkänd på motsvarande ks. Uppgifterna 4-7, Del B, är G-uppgifter och är tänkta att testa grundläggande kunskaper och färdigheter. Uppgifterna 8-11, Del C, är något mer avancerade och de poäng man samlar på dessa är VG-poäng som krävs för de högre betygen. Samtliga uppgifter poängsätts med maximalt 3 poäng per uppgift. Skriv tydliga lösningar med utförliga motiveringar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Preliminära betygsgränser: A - 28 poäng varav minst 8 VG-poäng, B - 25 poäng varav minst 5 VG-poäng, C - 21 poäng varav minst 2 VG-poäng, D - 18 poäng, E - 17 poäng. FX - 15 poäng.

Lycka till!

Del A

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x + 2 \sin x}{x + 3x^2}$.
2. Låt $f(x) = x^2 e^{-2x}$. Bestäm samtliga lokala extrempunkter till f och skissa kurvan i stora drag.
3. Beräkna integralen $\int_2^3 \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ med hjälp av variabelsubstitution.

Del B

4. Låt f vara kontinuerlig och positiv på intervallet $[a, b]$.
 - A. Härled formeln $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ för beräkning av den rotationsvolym som uppstår när ytan mellan x -axeln och kurvan $y = f(x)$ roterar ett varv runt x -axeln.
 - B. Använd sedan denna formel för att visa att volymen av ett klot med radie r fås som $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.Uppgift B får lösas även om man inte har löst uppgift A.

5. Antar funktionen $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctan x$ något största respektive minsta värde? Bestäm i förekommande fall dessa.
6. Bestäm Maclaurin-polynomet (Taylorpolynomet vid origo alltså) av grad 2 till funktionen $f(x) = \sqrt{x + 100}$. Avgör sedan om det är möjligt att beräkna ett närmevärde med tre korrekta decimaler till $\sqrt{104}$ med hjälp av detta Maclaurin-polynom. Om det är möjligt, gör det.
7. Bestäm ekvationer för tangent och normal till kurvan $x^2 + y^4 = 5$ i punkten $(-2, 1)$.

Del C

8. Vid urladdning av en kondensator med kapacitansen C över en resistor med resistansen R gäller för spänningen u vid tiden t att $u = -RC \frac{du}{dt}$. Om spänningen vid tiden 0 är E – avgör vid vilken tidpunkt t spänningen har gått ner till hälften.
9. En tank som rymmer 10 kubikmeter fylls på med avloppsslam i en takt som varierar med tiden. Närmare bestämt: man räknar med att vid tidpunkten t fylls slam på i en takt av $\frac{10}{t^2 + 4}$ kubikmeter per timme. Tanken är från början tom. Kommer den att svämma över?
10. Avgör om det är sant att $1 \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2 - 1} \leq 2$.
11. Från en ort Alvestad går en rak motorväg norrut till en ort Benhammar belägen 40 km från Alvestad. En sovsstad Vesjön växer upp 4 km rakt öster om motorvägen, mer precist rakt österut från en punkt på motorvägen belägen 24 km norr om Alvestad och 16 km söder om Benhammar. En trafikundersökning visar att invånarna i Vesjön besöker Alvestad dubbelt så ofta som Benhammar. Hur ska en anslutningsväg från Vesjön till motorvägen byggas för att invånarnas totala bensinförbrukning vid färd till Alvestad och Benhammar ska bli så liten som möjligt?