Lösningsförslag till
Tentamen i SF1602 Differential- och integralkalkyl II, del 1
för CFATE 1 den 1 juni 2009 kl 8-13

1. **Finn alla reella tal x i intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$ som uppfyller ekvationen $\sin(2x+\pi) = -\sqrt{3}/2$.**

Ekvationen är ekvivalent med att $2x+\pi = 4\pi/3 + n2\pi$ eller $2x+\pi = -\pi/3 + n2\pi$, n godtyckligt heltal. I det första fallet fås lösningarna $x = \pi/6 + n\pi$ och i det andra fallet fås $x = -2\pi/3 + n\pi$. Av alla dessa lösningarna är det fyra som ligger inom det angivna intervallet, nämligen $\pi/6$, $-5\pi/6$, $-2\pi/3$ och $\pi/3$.

Svar: $\pi/6$, $-5\pi/6$, $-2\pi/3$ och $\pi/3$.

2. **Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x) = x^4 e^{-x^2}$ och skissa kurvan $y = f(x)$. Bestäm sedan också värdemängden till f.**

Vi deriverar och får (efter förenkling) $f'(x) = 2x^3(2-x^2)e^{-x^2}$. Kritiska punkter är alltså 0 och $\pm\sqrt{2}$. Teckenstudium av derivatan ger:
när $x < -\sqrt{2}$ så är $f'(x) > 0$ så f är strängt växande på detta intervall
när $-\sqrt{2} < x < 0$ så är $f'(x) < 0$ så f är strängt avtagande på detta intervall
när $0 < x < \sqrt{2}$ är $f'(x) > 0$ så f är strängt växande på detta intervall
när $x > \sqrt{2}$ är $f'(x) < 0$ så f är strängt avtagande på detta intervall
Detta betyder att f har tre lokala extrempunkter, ett lokalt min i origo (funktionsvärdet där är 0) och lokala max i $\pm\sqrt{2}$ (funktionsvärdet är $4/e^2$ i båda dessa punkter). Det är standardgränsvärde att $f(x) \to 0$ när $x \to \pm\infty$.
Återstår bara att skissa kurvan.

3. **Beräkna, med hjälp av partiell integration, integralen $\int_1^2 x^3 \ln x \, dx$.**

$$\int_1^2 x^3 \ln x \, dx = [\frac{1}{4}x^4 \ln x]_1^2 - \frac{1}{4}\int_1^2 x^3 \, dx = 4\ln 2 - [\frac{x^4}{16}]_1^2 = 4\ln 2 - \frac{15}{16}.$$

4. **En papperskorg ska tillverkas i form av en rektangulär låda utan lock och med kvadratisk bottenyta. Bestäm den maximala volymen av en sådan papperskorg med totala begränsningsytan 30 kvadratdecimeter.**

Om bottenytan är en kvadrat med sida x och höjden är y så är volymen som ska maximeras x^2y. Men om begränsningsarean ska vara 30 kvadratdecimeter så måste $x^2 + 4xy = 30$ vilket är detsamma som att $y = (30 - x^2)/4x$. Insättning av detta villkor i uttrycket för volymen ger (efter förenkling) att vi ska maximera $f(x) = (30x - x^3)/4$ där vi måste ha $0 \leq x \leq \sqrt{30}$ för annars blir volymen negativ. Eftersom f är deriverbar och positiv i det inre av intervallet och noll i ändpunkterna så måste maximum antas i en punkt där derivatan är noll. Vi deriverar och får $f'(x) = (30-3x^2)/4$ vilket i det aktuella intervallet är noll precis när $x = \sqrt{10}$. Detta är alltså det värde på x som ger största volymen och den största volymen är $f(\sqrt{10}) = 5\sqrt{10}$.

Svar: $f(\sqrt{10}) = 5\sqrt{10}$.

5. **Bestäm Maclaurinpolynomet (Taylorpolynomet kring origo alltså) av grad 2 till $f(x) = \sqrt{25 + x}$ och bestäm med hjälp av detta polynom ett närmevärde till $\sqrt{26}$. Är absolutbeloppet av felet säkert mindre än $0,001$?**

Eftersom (med hjälp av elementär derivering) $f(0) = 5$, $f'(0) = 1/10$ och $f''(0) = -1/500$ fås att det sökta Maclaurinpolynomet är $p(x) = 5 + x/10 - x/1000$ och det sökta närmevärdet är $p(1) = 5,099$. Eftersom $f'''(x) = (3/8)(25 + x)^{-5/2}$ är mindre än $3/25000$ när x ligger varierar mellan noll och ett så är felet i approximationen till beloppet högst $1/50000$ som är mindre än $0,001$

Svar: Närmevärdet är $5,099$ och felet är mindre än $0,001$.

6. **Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + y' - 6y = -18$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 15$.**

Vi ser direkt att en partikulärlösning till diffekvationen är $y_p(t) = 3$. Med hjälp av metoden med karaktäristisk ekvation (se boken) fås att den homogena ekvationen har allmän lösning $y_h(t) = Ce^{-3t} + De^{2t}$. Differentialekvaitonen har därför allmän lösning $y(t) = 3 + Ce^{-3t} + De^{2t}$ där C och D bestäms ur initialvillkoren till -3 resp 3.

Svar: $y(t) = 3 - 3e^{-3t} + 3e^{2t}$

7. Enligt Hookes lag gäller när en fjäder sträcks ut eller trycks ihop att kraften är proportionell mot fjäderns längdändring. För en viss fjäder gäller att kraften 250 N svarar mot en längdändring av 5 cm. Bestäm det arbete som krävs för att tänja ut denna fjäder 10 cm från jämviktsläget. Tips: arbete är kraft gånger sträcka och även om kraften varierar kan den på ett litet intervall approximeras med en konstant. (Från Persson och Böiers.)

Hookes lag $F = kx$ med $F = 250$ N och $x = 0,05$ m ger oss direkt att vår fjäder har fjäderkonstant $k = 5000$. Arbetet är kraft gånger väg. Dela in vägen från 0 till 0,1 i små bitar med längd Δx och välj ett x-värde på varje bit (kalla x-värdet på den j:te biten för x_j. På varje bit är då kraften ungefärligen konstant, på bit nummer j blir arbetet ungefär $5000x_j\,\Delta x$. Hela arbetet fås genom summering, när Δx går mot noll får vi eftersom funktionen i summan är kontinuerlig att arbetet är $\int_0^{0,1} 5000x dx = 25$ Nm.
Svar: 25 Nm

8. Bestäm alla primitiva funktioner till $e^{-\sqrt{x}}$.

Vi använder först variabelsubstitution och sedan partiell integration och får

$$\int e^{-\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} = t, dx = 2t\, dt = 2\int te^{-t}\, dt = \{\text{ efter partialintegration och förenkling}\}$$

$$= -2te^{-t} - 2e^{-t} + C = \{t = \sqrt{x}\} = -2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + C$$

där C är en godtycklig konstant.
Svar:$-2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}} - 2e^{-\sqrt{x}} + C$

9. Avgör om det är sant att $0 \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n^2} \leq 2$.

Eftersom varje term i summan är positiv så är det klart att summan är större än noll. För den andra olikheten använder vi Cauchys sats 1 om integraler och summor och får att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n^2} \leq \ln 2 + \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x^2}\, dx = 3\ln 2 - 1 \leq 2,$$

där vi vid beräkning av integralen har använt substitutionen $t = 1/x$ och det faktum att $\ln 2 < 1$.
Svar JA

10. Formulera och bevisa integralkalkylens huvudsats.

Se boken

11. Låt $h(x) = \dfrac{|x| - 1}{x^2 - 1}$. I vilka punkter är h kontinuerlig? Går det att utvidga h till en funktion som är kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$?

Eftersom h är en elementär funktion som är definierad för alla x utom ± 1 så ser vi direkt att h är kontinuerlig på hela reella axeln utom i punkterna 1 och -1.
Eftersom $\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ och $\lim_{x \to -1} h(x) = \lim_{x \to -1} \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{2}$ så ser vi att om vi tilldelar funktionen värdet $1/2$ när $x = \pm 1$ så har vi utvidgat den till att bli kontinuerlig också i dessa punkter.