Institutionen för Matematik, **KTH**

Diff & Int 5B1107, 2005/08/27, 14.00–19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.

För betyg 3 erfordras minst 6 godkända uppgifter från Del I. För betyg 4 och 5 erfordras att man klarar av Del I, samt att man har minst 10 respektive 15 poäng från Del II. Varje uppgift i Dell II, har 4 poäng.
OBS! Tidigare tillgodoräknade bonus godtas inte vid denna omtentamen.
Motivera ordentligt.

Del I

1) Bestäm ekvationen till tangentplanet till ytan $4z^2 + 3xy - 7yz = 0$ i punkten $(1, 1, 1)$.

2) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen

$$f(x, y) = \ln(\frac{y + x}{y})$$

kring punkten $(0, 1)$.

3) Bestäm största värdet för funktionen $x^2 + y^2 + xy$ i området $x^2 + y^2 \leq 1$.

4) Beräkna dubbelintegralen $\int\int_D xy\ dxdy$ då

$$D = \{x > 1,\ y > 1,\ xy < 2\}.$$

5) Bestäm potentialfunktionen till vektorfältet

$$\mathbf{F} = (z + x^2, 2z - 3y^2, x + 2y).$$

6) Bestäm värdet av linjeintegralen

$$\int_C x^2y^3dx + xdy$$

över kurvan C som ges av

$$C : \qquad (t, t^2) \qquad 0 < t < 1.$$

7) Beräkna ytintegralen

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

då $\mathbf{F} = (y + z^2, x + zy, z)$, och ytan S är enhetssfären.

Del II

1) Definiera begreppet differentierbar och ge ett exempel på en funktion f vars partiella derivator f_1, f_2 existerar i $(1,-1)$ men att f inte är differentierbar i punkten $(1,-1)$. (4p)

2) Beräkna dubbelintegralen (4p)

$$\int\int (x+y)^2 \cos(y^2 - x^2) dx dy$$

över området

$$x - y \leq 0, \quad x + y \leq \sqrt{\pi}, \quad x \geq 0.$$

3) Låt f vara en deriverbar funktion av en variabel, och sätt (4p)

$$z(x,y) = xf(y/x) + x^2y^2.$$

Beräkna uttrycket

$$xz_x + yz_y - z.$$

4) Visa genom uträkning att (4p)

$$\textbf{a)} \quad \mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0, \qquad \textbf{b)} \quad \mathrm{rot}(f\mathbf{F}) = f\mathrm{rot}\mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F},$$

för en deriverbar funktion f och vektorfält $\mathbf{F}$.

5) Formulera divergenssatsen (i 3 dimensioner) och ge ett bevis för denna sats. (4p)
OBS! Du får enbart använda definitionerna och inga satser från boken.

Lycka Till

Lösningsförslag till Tentamen 5B1107, 25/04/2005

Del I

1) Eftersom ytan representeras som nivåyta till funktion $F(x,y,z) = 4z^2 + 3xy - 7yz$ så är ∇F normal till ytan och därför normal till tangentplanet. Därför är tangentplanet

$$(x-1, y-1, z-1) \cdot \nabla F(1,1,1) = 0.$$

Vi har $\nabla F = (3y, -7z, 8z - 7y)$ och i punkten $(1,1,1)$ är normalen $(3,-7,1)$. Ekvationen för tangentplanet blir

$$(x-1, y-1, z-1) \cdot (3,-7,1) = 0,$$

eller

$$3x - 7y + z = -3.$$

2) Funktionen skrivs som $f(x,y) = \ln(x+y) - \ln y$. Taylorpolynomet ges av

$$f(x,y) = f(0,1) + f_x(0,1)(x-0) + f_y(0,1)(y-1) +$$

$$+ f_{xx}(0,1)(x-0)^2/2 + 2f_{xy}(0,1)(x-0)(y-1) + f_{yy}(0,1)(y-1)^2/2.$$

En enkel uträkning för dessa värden ger $f_x = 1/(x+y)$, $f_y = 1/(x+y) - 1/y$, och andra derivatorna $f_{xx} = -1/(x+y)^2$, $f_{xy} = -1/(x+y)^2$, $f_{yy} = -1/(x+y)^2 + 1/y^2$, och efter insättning i punkten $(0,1)$

$$f(x,y) = x - x^2/2 - 2(x-0)(y-1).$$

3) Största värdet fås antingen inom området och där gradienten är noll ellel på randen. Vi har

$$\nabla f = (2x + y, 2y + x) = (0,0)$$

vilket ger $(x,y) = (0,0)$. Värdet i denna punkt är $f(0,0) = 0$.

Vi maximerar funktionen på randen. Vi betraktar $f(x,y) = 1 + y^2 + xy$ då $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Enligt Lagranges metod skall vi lösa systemet $\nabla f = \lambda \nabla g$, dvs $y = 2\lambda x$, $2y + x = 2\lambda y$. $\lambda = 0$ ger origo som inte ligger på bivillkorskurvan, så $\lambda \neq 0$. Division ger $(x + 2y)x = y^2$ varav $(x+y)^2 = 2y^2$, vilket ger $x + y = \pm\sqrt{2}y$, dvs $x = ay$, med $a = \pm\sqrt{2} - 1$. Villkoret $x^2 + y^2 = 1$ ger $y = 1/\sqrt{1+a^2}$ och $x = a/\sqrt{1+a^2}$, varför max/minvärdet blir $(2 + a + a^2)/(1 + a^2)$. Maximum är

$$\frac{2\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} - 1)} > 0.$$

4)

$$\int\int_D xydxdy = \int_1^2 x \left(\int_1^{2/x} ydy \right) dx = \int_1^2 x(2/x^2 - 1/2)dx = \ln 4 - 3/4.$$

5) Vi ska ha

$$f_x = z + x^2, \qquad f_y = 2z - 3y^2, \qquad f_z = x + 2y.$$

Integration ger $f(x,y,z) = zx + x^3/3 + g(z,y)$, derivering m.a.p. y ger $f_y = g_y = 2z - 3y^2$. Integrera m.a.p. y och sedan derivera m.a.p. z och jämför med sista termen, $f = zx + x^3/3 + 2zy - y^3 + h(z)$, och $f_z = x + 2y + h_z = x + 2y$, dvs $h = \mathit{konstant}$. Vi har

$$f = zx + x^3/3 + 2zy - y^3 + K.$$

6) Med $x = t$, $y = t^2$ har vi $dx = dt$, $dy = 2tdt$, och

$$\int_C = \int_0^1 t^2(t^2)^3 dt + t2tdt = \int_0^1 (t^8 + 2t^2)dt = 1/9 + 2/3 = 7/9.$$

7) Divergenssatsen ger

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_K \mathrm{div}\mathbf{F} dV$$

där K är klotet Då $\mathbf{F} = (y + z^2, x + zy, z)$, får vi $\mathrm{div}\mathbf{F} = z + 1$ och integralen blir

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int\int\int_K (1+z)dV = \text{Volymen för klotet} + \int\int\int_K z dV = \frac{4\pi}{3}.$$

Det sista integralen blir noll pga av antisymmetri.

Del II

1) Se boken för definition för differentierbarhet. Ett exempel är $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ då $(x,y) \neq (0,0)$, och $f(0,0) = 0$. Partiella derivatorna $f_{,}f_2$ r̈knas enligt definition och vi får att dessa är noll. Men funktionen är inte kontinuerlig (se Ex. 3, sida 714 i textboken). Därför kan f ej vara differentierbar för att då skulle den vara kontinuerlig (enkelt att visa).

2) Sätt

$$x + y = u, \qquad y - x = v.$$

Vi får

$$x = (u - v)/2, \qquad y = (u + v)/2,$$

och det givna området avbildas på

$$v \geq 0, \qquad u \leq \sqrt{\pi}, \qquad u - v \geq 0.$$

Vi har också $\partial(x,y)/\partial(u,v) = 1/2$. Integralen kan nu skrivas i nya variabler

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} du \int_0^u u^2 \cos(uv) dv = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} u \sin u^2 du = \cdots = \frac{1}{2} \ .$$

3)

$$z_x = f(y/x) + xf'(y/x)\left(-y/x^2\right) + 2xy^2 = f - y/xf' + 2xy^2.$$

$$z_y = xf'(y/x)(1/x) + 2x^2y = f' + 2x^2y.$$

Vilket ger

$$xz_x + yz_y - z = \cdots = 3x^2y^2.$$

4a) Vi har

$$\nabla f \times \nabla g = (f_y g_z - f_z g_y, f_z g_x - f_x g_z, f_x g_y - f_y g_x),$$

och divergensen är

$$\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = (f_y g_z - f_z g_y)_x + (f_z g_x - f_x g_z)_y + (f_x g_y - f_y g_x)_z = \cdots = 0.$$

4b) Låt $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, så att $f\mathbf{F} = (fF_1, fF_2, fF_3)$.

$$\mathrm{rot}(f\mathbf{F}) = \nabla \times (fF_1, fF_2, fF_3) = ((fF_3)_y - (fF_2)_z, (fF_1)_z - (fF_3)_x, (fF_2)_x - (fF_1)_y)$$

$$= ((f_yF_3 + f(F_3)_y - f_zF_2 - f(F_2)_z, f_zF_1 + f(F_1)_z - f_xF_3 - f(F_3)_x, f_xF_2 + f(F_2)_x - f_yF_1 - f(F_1)_y)$$

$$\cdots = f\mathrm{rot}\mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F},$$

5) Se boken.