Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1107, Differential- och integralkalkyl II, del 2, flervariabel, för F1. Tentamen fredag 25 maj 2007, 8.00-13.00

Förslag till lösningar (ändrat 28/5-07, 29/5-07)

1. Tangentplanet till ytan $z(1+xy)-2=0$ i $(1,1,1)$ skär z-axeln i en viss punkt. Bestäm den.

   Lösning: Med $F=z(1+xy)$ är tangentplanets normal $\nabla F(1,1,2)$. Nu är $\nabla F=(yz,xz,1+xy)$, så normalen är $(1,1,2)$ och tangenplanets ekvation blir $1(x-1)+1(y-1)+2(z-1)=0$, eller $x+y+2z=4$. På z-axeln är $x=y=0$ vilket ger $z=2$. Den sökta punkten är därför $(0,0,2)$.

2. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion och sätt $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$. Transformera f'_x, f'_y samt differentialuttrycket $(f'_x)^2+(f'_y)^2$.

   Lösning: Enligt kedjeregeln får vi $f'_r=f'_x x'_r+f'_y y'_r=f'_x\cos\phi+f'_y\sin\phi$ och $f'_\phi=f'_x x'_\phi+f'_y y'_\phi=f'_x(-r\sin\phi)+f'_y r\cos\phi$. Vi löser ut f'_x och f'_y och får

   $f'_x=f'_r\cos\phi-f'_\phi\cdot\frac{1}{r}\sin\phi$ samt $f'_y=f'_r\sin\phi+f'_\phi\cdot\frac{1}{r}\cos\phi$.

   Detta ger $(f'_x)^2+(f'_y)^2=(f'_r)^2+\frac{1}{r^2}(f'_\phi)^2$.

3. Finns det någon riktning så att $D_{\mathbf{v}}f(1,2)=12$, om $f(x,y)=x^2+2xy-y^3$?

   Lösning: Vi vet att $|D_{\mathbf{v}}f(1,2)|\le|\nabla f(1,2)|$. Här är $\nabla f=(2x+2y,2x-3y^2)$ så $\nabla f(1,2)=(6,-10)$, varav $|\nabla f(1,2)|^2=36+100=136<144=12^2$. Svar: NEJ!

4. Bestäm och karakterisera de kritiska punkterna till funktionen $f(x,y)=3x-x^3-3xy^2$.

   Lösning: $\nabla f=(3-3x^2-3y^2,-6xy)$ vilket $=(0,0)$ precis då $x^2+y^2=1$ och $xy=0$. De kritiska punkterna är alltså $(\pm1,0)$ och $(0,\pm1)$.

   Vi beräknar andraderivatorna: $A=f''_{xx}=-6x$, $B=f''_{xy}=-6y$, $C=f''_{yy}=-6x$, varför $AC-B^2=36x^2-36y^2$. Då är $AC-B^2<0$ i $(0,\pm1)$: sadelpunkter. I $(\pm1,0)$ är $AC-B^2>0$, varför $(-1,0)$ är ett lokalt min, ty $A>0$, medan $(1,0)$ är ett lokalt max eftersom $A<0$.

5. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y)=xy^2-x^2$ i området $x^2+y^2\le1$, $x\ge0$.

Lösning: Kritiska punkter i det inre: $\nabla f = (y^2 - 2x, 2xy) = (0,0)$ endast då $(x,y) = (0,0)$, som *inte* är någon inre punkt.

Funktionen saknar singulära punkter. Det återstår att undersöka randen, vilken består av två delar. På linjestycket $x = 0$, $-1 \le y \le 1$ är $f = 0$. På halvcirkeln är $y^2 = 1 - x^2$, så $f = x(1-x^2) - x^2 = x - x^2 - x^3 = g(x)$, $0 \le x \le 1$. $g'(x) = 0$ ger $x = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{3}{9}}$ som leder till en lösning, $x = \frac{1}{3}$, i området. $g(\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$. I intervallets ändpunkter får vi värdena $g(0) = 0$ och $g(1) = -1$. Jämförelse ger: största värdet är $5/27$, minsta värdet är -1.

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{y}{1+x}\, dxdy$ där D är det triangulära området med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$.

Lösning: De tre linjer som begränsar D är $x = 0$, $y = 0$ samt $x + y = 1$. Området kan skrivas $0 \le y \le 1 - x$, $0 \le x \le 1$. Integralen blir

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} \left(\int_{y=0}^{1-x} y\, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2}(1-x)^2\, dx$$

Substitutionen $t = 1 + x$ ger integralen

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{4 - 4t + t^2}{t}\, dt = ... = 2 \ln 2 - \frac{5}{4}.$$

7. a) Definiera med figur rymdpolära (sfäriska) koordinater och uttryck x, y och z i dem. Definitionsmängder skall framgå.

b) Uttryck mängden $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $y > |x|$, $z \ge 0$ i rymdpolära koordinater.

Lösning: a) $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r\cos\theta$, med $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ge 0$, $\theta : 0 \to \pi$, samt $\phi : 0 \to 2\pi$. (Se Persson-Böiers 2, Ex. 23, s. 33-34.)

b) $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $\pi/4 < \phi < 3\pi/4$.

8. Låt $f(x,y,z) = x^2 y - x \sin z e^y$ och $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, x)$. Ange vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem:

$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f$, $\operatorname{grad} \operatorname{rot} \mathbf{F}$, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F}$, $\operatorname{rot} \operatorname{div} f$.

Lösning: Bara $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f$ och $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F}$ har mening. Den första är (alltid) $= \mathbf{0}$, och den andra är (alltid) $= 0$.

($\operatorname{grad} \operatorname{rot} \mathbf{F}$ saknar mening eftersom grad bara kan operera på vanliga, skalära, funktioner. $\operatorname{rot} \operatorname{div} f$ saknar mening eftersom div opererar på vektorfält.)

9. Beräkna kurvintegralen $\int_C \frac{x}{x+y}\,dx + \frac{y}{x+y}\,dy$ längs $y = 2x$ från $(1, 2)$ till $(2, 4)$.

Lösning: Med $y = 2x$, $x : 1 \to 2$ blir kurvintegralen

$$\int_1^2 \left(\frac{x}{x+2x} + \frac{2x}{x+2x} \cdot 2 \right) dx = \int_1^2 \frac{5x}{3x}\,dx = \frac{5}{3}.$$

10. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\,dS$ då $\mathbf{F} = (y, -x, z)$ och $\mathcal{S}$ betecknar den del av ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ där $z \geq 0$ och $y \geq 0$. Enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ är uppåtriktad.

Lösning: Flödesintegralen är $I = \iint_D (y, -x, z(x, y)) \cdot (-z'_x, -z'_y, 1)\,dxdy$, där D ges av $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$ och där $z(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. Uträkning och övergång till polära koordinater ger nu

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (y, -x, 4 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1)\,dxdy = \iint_D (4 - x^2 - y^2)\,dxdy \\ &= \int_0^\pi d\phi \int_0^2 (4 - r^2) r\,dr = \pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 4\pi. \end{aligned}$$

11. Låt $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ för $(x, y) \neq 0$ och $f(0, 0) = 0$.

a) Visa att f är kontinuerlig och har partiella derivator i origo.

b) Visa att f inte är differentierbar i origo.

Lösning: a) Utanför origo är $f(x, y) = r \cos\phi \sin\phi$ som uppenbarligen går mot noll då $(x, y) \to 0$. Det visar kontinuiteten i origo. Längs axlarna är $f = 0$. Därför existerar de partiella derivatorna i origo och är $= 0$.

b) Bilda kvoten

$$Q(x, y) = \frac{f(x, y) - f(0, 0) - x f'_x(0, 0) - y f'_y(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Att f är differentierbar i origo betyder att $Q(x, y) \to 0$ då $(x, y) \to 0$. I vårt fall är $Q(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, som inte går mot noll då $(x, y) \to 0$. T ex är gränsvärdet längs x-axeln 0, medan gränsvärdet längs $y = x$ är $1/2$.

12. Är det sant att $3xy^2 + 1 > 0$ då $x^2 + 2y^2 \leq 1$?

Lösning: Vi skall kontrollera att minimum för den kontinuerliga funktionen $f(x, y) = 3xy^2 + 1$ på den kompakta mängden $g(x, y) = x^2 + 2y^2 \leq 1$ är > 0. Vi vet att ett minsta värde antas.

Vi undersöker först eventuella inre kritiska punkter till f.

$\nabla f = (3y^2, 6xy) = (0,0)$ endast då $y = 0$ och $f(x,0) = 1 > 0$.

I en extrempunkt på randen måste ∇f och ∇g vara parallella, enligt Lagranges metod. Det leder till villkoret

$$\begin{vmatrix} 3y^2 & 6xy \\ 2x & 4y \end{vmatrix} = 12(y^3 - x^2 y) = 0.$$

Fallet $y = 0$ har redan behandlats. Återstår $y^2 - x^2 = 0$. Då måste $x^2 + 2x^2 = 1$, dvs $x^2 = 1/3$, varav $f(x,y) = 3 \cdot \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$.

Saken är klar: JA! $f(x,y) > 0$ om $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

13. Undersök om $(1,1,1)$ är en lokal extrempunkt för funktionen $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{6}z^6 - xyz$ och bestäm i så fall dess karaktär.

Lösning: $\nabla f = (x - yz, y^3 - xz, z^5 - xy) = (0,0,0)$ i punkten $(1,1,1)$. Alltså är $(1,1,1)$ en kritisk punkt för f. Vi låter $\mathbb{A}$ beteckna $D^2 f(1,1,1)$, matrisen med alla andraderivator till f, i punkten.

$$\mathbb{A} = D^2 f(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & -z & -y \\ -z & 3y^2 & -x \\ -y & -x & 5z^4 \end{bmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tillhörande kvadratiska form är $Q(h,k,l) = (h,k,l)\mathbb{A}(h,k,l)^T$ dvs

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= h^2 - 2hk - 2hl + 3k^2 - 2kl + 5l^2 \\ &= \frac{1}{2}(h-2k)^2 + \frac{1}{2}(h-2l)^2 + k^2 - 2kl + 3l^2 \\ &= \frac{1}{2}(h-2k)^2 + \frac{1}{2}(h-2l)^2 + (k-l)^2 + 2l^2. \end{aligned}$$

Uppenbarligen gäller $Q(h,k,l) \geq 0$. Kontroll visar att den $= 0$ endast i punkten $(0,0,0)$. Alltså är Q *positivt definit,* varför det är ett *lokalt minimum* för f i $(1,1,1)$.

En alternativ metod är att kolla $\mathbb{A}$:s underdeterminanter längs huvuddiagonalen. De är $1 > 0$, $1 \cdot 3 - 1 = 2 > 0$, samt $\det \mathbb{A} > 0$. Eftersom alla dessa determinanter är > 0 följer att den kvadratiska formen är positivt definit.

14. a) Ange formeln för variabelbyte i dubbelintegraler.

b) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y\,dxdy$ där D bestäms av olikheterna

$1 \leq xy \leq 4$, $0 \leq x \leq y \leq 4x$.

Lösning: a) $dxdy = |x'_u y'_v - x'_v y'_u|\, dudv = \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| dudv$, eller den mer fullständiga formeln (25), sid. 261, i Persson-Böiers gröna bok.

b) Skriv D som $1 \le xy \le 4$, $1 \le \frac{y}{x} \le 4$, och inför nya variabler $u = xy$, $v = y/x$. Då övergår D i området $E : 1 \le u \le 4$, $1 \le v \le 4$. Vidare blir

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = y \cdot \frac{1}{x} - x \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = 2\frac{y}{x} = 2v.$$

Eftersom $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = 1/\frac{d(u,v)}{d(x,y)}$ blir $dxdy = \frac{1}{2v} dudv$. Från $uv = y^2$ följer $y = \sqrt{uv}$. Integralen blir

$$\iint_E \sqrt{uv} \cdot \frac{1}{2v} dudv = \int_1^4 \sqrt{u}\, du \cdot \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{v}}\, dv = ... = \frac{14}{3}.$$

15. a) Parametrisera ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) och beräkna dess krökning i en godtycklig punkt.

b) Visa att cirklar (fallet $a = b$) är de enda ellipser som har konstant krökning, dvs krökningen är lika stor i varje punkt.

Lösning: a) $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, 0)$ ger hastighetsvektorn $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, b \cos t, 0)$ och accelerationsvektorn $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = (-a \cos t, -b \sin t, 0)$. Farten, $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t}$. $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t) = (0, 0, ab)$.

Vi kan nu beräkna krökningen κ med hjälp av formeln

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)|}{v(t)^3} = \frac{ab}{(a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t)^{3/2}}.$$

b) Uppenbarligen är κ konstant endast då cos-termen i nämnaren försvinner, vilket sker precis då $a = b$.

16. C är kurvan $x = t \cos(1 - t^2)$, $y = t^2$, $z = t$, från origo till punkten $(1, 1, 1)$. Beräkna linjeintegralen $\int_C (y + z)\, dx + (x + z)\, dy + (x + 4y)\, dz$.

Lösning: Med $\mathbf{F} = (y + z, x + z, x + 4y)$ har vi

$$D\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fältet är ”nästan konservativt”. Vi ser att $\mathbf{G} = (y + z, x + z, x + y)$ gör $D\mathbf{G}$ symmetrisk. $\mathbf{G}$ har potentialfunktionen $\phi = xy + yz + zx$, och $\mathbf{F} =$

$\mathbf{G} + (0, 0, 3y)$, varför

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} + \int_C 3y\, dz.$$

Den sista integralen $= \int_0^1 3t^2\, dt = [t^3]_0^1 = 1$, och $\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \phi(1, 1, 1) - \phi(0, 0, 0) = 3$. Alltså är den sökta kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 3 + 1 = 4$.

17. $\mathcal{S}$ betecknar den del av sfären $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$ där $z \geq 0$. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$$

då $\mathbf{F} = (y^2 \cos xz, x^3 e^{yz}, -e^{-xyz})$ och $\widehat{\mathbf{N}}$ är den yttre enhetsnormalen.

Lösning: Enligt Stokes sats är den sökta integralen $= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där C betecknar kurvan $x^2 + y^2 + 9 = 25$ (sätt $z = 0$ i sfärens ekvation), dvs $x^2 + y^2 = 16$, ett varv moturs.

För $z = 0$ blir $\mathbf{F} = (y^2, x^3, -1)$. Stokes sats en gång till, för ytan $D : x^2 + y^2 \leq 16$, $z = 0$, med $\widehat{\mathbf{N}} = (0, 0, 1)$ ger

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \operatorname{rot} (y^2, x^3, -1) \cdot (0, 0, 1)\, dxdy \\
&= \iint_D (3x^2 - 2y)\, dxdy = \iint_D 3x^2\, dxdy \\
&= \frac{3}{2} \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \frac{3}{2} \cdot 2\pi \int_0^4 r^2 \cdot r dr \\
&= 3\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^4 = 3\pi \cdot 64 = 192\pi.
\end{aligned}$$