Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1107, Differential- och integralkalkyl II, del 2, flervariabel, för F1.
Tentamen fredag 25 maj 2007, 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.
Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B). För godkänt (betyg tre) räcker det att, inklusive maximalt 16 bonuspoäng från lappskrivningar VT 2007, uppnå 32 poäng (från del A och B).
För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och dessutom har uppnått ett tillräckligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, tio uppgifter à 4 poäng.

1. Tangentplanet till ytan $z(1+xy)-2=0$ i $(1,1,1)$ skär z-axeln i en viss punkt. Bestäm den.

2. Låt $f(x,y)$ vara en differentierbar funktion och sätt $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$. Transformera f'_x, f'_y samt differentialuttrycket $(f'_x)^2+(f'_y)^2$.

3. Finns det någon riktning så att $D_{\mathbf{v}}f(1,2)=12$, om $f(x,y)=x^2+2xy-y^3$?

4. Bestäm och karakterisera de kritiska punkterna till funktionen $f(x,y)=3x-x^3-3xy^2$.

5. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y)=xy^2-x^2$ i området $x^2+y^2\leq 1$, $x\geq 0$.

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{y}{1+x}\,dxdy$ där D är det triangulära området med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$.

7. a) Definiera med figur rymdpolära (sfäriska) koordinater och uttryck x, y och z i dem. Definitionsmängder skall framgå.

   b) Uttryck mängden $1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4$, $y>|x|$, $z\geq 0$ i rymdpolära koordinater.

8. Låt $f(x,y,z) = x^2y - x\sin ze^y$ och $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, x)$. Ange vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem:

   $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$, $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\operatorname{rot}\operatorname{div} f$.

9. Beräkna kurvintegralen $\int_C \frac{x}{x+y}\,dx + \frac{y}{x+y}\,dy$ längs $y = 2x$ från $(1,2)$ till $(2,4)$.

10. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS$ då $\mathbf{F} = (y, -x, z)$ och $\mathcal{S}$ betecknar den del av ytan $z = 4 - x^2 - y^2$ där $z \geq 0$ och $y \geq 0$. Enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ är uppåtriktad.

Del B, sju uppgifter à 6 poäng:

11. Låt $f(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$ för $(x,y) \neq 0$ och $f(0,0) = 0$.

    a) Visa att f är kontinuerlig och har partiella derivator i origo.

    b) Visa att f inte är differentierbar i origo.

12. Är det sant att $3xy^2 + 1 > 0$ då $x^2 + 2y^2 \leq 1$?

13. Undersök om $(1,1,1)$ är en lokal extrempunkt för funktionen $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{6}z^6 - xyz$ och bestäm i så fall dess karaktär.

14. a) Ange formeln för variabelbyte i dubbelintegraler.

    b) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y\,dxdy$ där D bestäms av olikheterna

    $1 \leq xy \leq 4$, $0 \leq x \leq y \leq 4x$.

15. a) Parametrisera ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) och beräkna dess krökning i en godtycklig punkt.

    b) Visa att cirklar (fallet $a = b$) är de enda ellipser som har konstant krökning, dvs krökningen är lika stor i varje punkt.

16. C är kurvan $x = t\cos(1-t^2)$, $y = t^2$, $z = t$, från origo till punkten $(1,1,1)$. Beräkna linjeintegralen

$$\int_C (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+4y)\,dz.$$

17. $\mathcal{S}$ betecknar den del av sfären $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$ där $z \geq 0$. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS$$

    då $\mathbf{F} = (y^2\cos xz, x^3e^{yz}, -e^{-xyz})$ och $\widehat{\mathbf{N}}$ är den yttre enhetsnormalen.