Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

5B 1107, Differential- och integralkalkyl II, del 2, flervariabel, för F1.
Tentamen tisdag 28 augusti 2007, 14.00-19.00

Förslag till lösningar.

1. Om $F(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$ så är tangentplanets normal $\nabla F(1,-1,1)$. Vi har $\nabla F = (2xy+z^2, 2yz+x^2, 2zx+y^2)$ så normalen blir $(-1,-1,3)$ och tangentplanets ekvation blir

   $-1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y+1) + 3 \cdot (z-1) = 0$, eller $x + y - 3z + 3 = 0$.

2. Sätt $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, $v = xy$. Kedjeregeln ger

$$g'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = -yf'_u + xf'_v.$$

   Kedjeregeln en gång till ger nu ($f''_{uv} = f''_{vu}$ då f är C^2)

$$\begin{aligned} g''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x}(-yf'_u + xf'_v) = -y\frac{\partial}{\partial x}f'_u + 1 \cdot f'_v + x\frac{\partial}{\partial x}f'_v \\ &= -y(f''_{uu}u'_x + f''_{uv}v'_x) + f'_v + x(f''_{vu}u'_x + f''_{vv}v'_x) \\ &= -y(xf''_{uu} + yf''_{uv}) + f'_v + x(xf''_{vu} + yf''_{vv}) \\ &= -xy(f''_{uu} - f''_{vv}) + (x^2 - y^2)f''_{uv} \\ &= 2uf''_{uv} - v(f''_{uu} - f''_{vv}). \end{aligned}$$

3. Vi har $\nabla f = (6x^2 - 6y, 6y - 6x)$. Kritiska punkter fås då $y = x^2$ och $y = x$, vilket ger punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$.

   Andraderivatorna är $A = f''_{xx} = 12x$, $B = f''_{xy} = -6$ och $C = f''_{yy} = 6$. Vi får diskriminanten $\Delta = AC - B^2 = 72x - 36$.

   I punkten $(0,0)$ är $\Delta < 0$: *sadelpunkt*.

   I punkten $(1,1)$ är $\Delta > 0$ och $A > 0$: *lokalt minimum*.

4. $\nabla f = (y, x - 2y)$ så den enda kritiska punkten är $(0,0)$ och den tillhör områdets inre. $f(0,0) = 0$.

   Singulära punkter saknas. Det återstår att undersöka randen: $x^2 + y^2 = 1$. Vi sätter $x = \cos t$, $y = \sin t$, och $f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t - \sin^2 t = \frac{1}{2}(\sin 2t + \cos 2t - 1) = g(t)$, där $0 \le t \le 2\pi$. $g(0) = g(2\pi) = 0$. $g'(t) = \cos 2t - \sin 2t = 0$ precis då $\tan 2t = 1$, dvs då $2t = \pi/4$ eller $5\pi/4$. $g(\pi/8) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ är största värdet medan $g(5\pi/8) = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ är minsta värdet.

5. Vi använder $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + O(t^4)$ och väljer $t = x^2 - 2y$. Det ger

$$\begin{aligned} e^{x^2-2y} &= 1 + x^2 - 2y + \frac{1}{2}(x^2 - 2y)^2 + \frac{1}{6}(x^2 - 2y)^3 + \text{högre ordning} \\ &= 1 + x^2 - 2y - 2x^2y + 2y^2 - \frac{4}{3}y^3 + \text{högre ordning.} \end{aligned}$$

Det sökta polynomet är $P_3(x, y) = 1 + x^2 - 2y - 2x^2y + 2y^2 - \frac{4}{3}y^3$.

6. D kan uttryckas som $x \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, varför integralen blir

$$\int_0^1 x \left(\int_x^1 y\, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_{y=x}^1 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3)\, dx = \frac{1}{8}.$$

7. Svaret är $\int_0^1 (\int_x^1 (\int_y^1 f(x, y, z)\, dz) dy) dx$. För att se det skriver vi upp området som $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$. Gränserna för z-integrationen är $y \leq z \leq 1$. Då återstår området $0 \leq x \leq y \leq$ i xy-planet. Det kan skrivas $x \leq y \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, vilket ger gränserna för y resp. x.

8. $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ betyder att $z \geq 0$. I xy-planet är $\phi = \frac{1}{4}\pi$ den del av linjen $y = x$ där $x, y \geq 0$. I rummet beskriver dessa relationer den del av planet $y = x$ som ligger i första oktanten, dvs där $x, y, z \geq 0$

9. **O**BS! Talet var felformulerat. Det skall vara linjestycket $y = x$ från origo till $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

   Kalla kurvintegralen $I = \int_C P\, dx + Q\, dy$. Vi sluter till kurvan genom att lägga till linjestycket C_1 från $(-1, 0)$ till $(0, 0)$. Området innanför den slutna kurvan kallar vi D. Greens formel ger nu

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (Q'_x - P'_y)\, dxdy - \int_{C_1} P\, dx + Q\, dy \\ &= \iint_D 2x\, dxdy - \int_{-1}^0 x\, dx = A + B. \end{aligned}$$

   Polära koordinater ger

$$A = \int_0^1 \int_{\pi/4}^{\pi} 2r \cos\phi \cdot r\, drd\phi = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

   och $B = -\left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2}$, så $I = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}$.

10. Ytan beskrivs av $z = z(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $(x,y) \in D$, där D är cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 4$. Normalen ges av
$\mathbf{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-x/\sqrt{4-x^2-y^2}, -y/\sqrt{4-x^2-y^2}, 1)$.
Integralen blir

$$\iint_D (-y, x, z(x,y)) \cdot \mathbf{N}(x,y,z(x,y))\, dxdy = \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\, dxdy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{4-r^2}\, r dr d\phi = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2}\right]_0^2 = 16\pi/3.$$

11. Låt $f(x,y) = x^2y/(x^4+y^2)$ för $(x,y) \neq 0$ och $f(0,0) = 0$.

a) Vi skall beräkna $\lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{v})-f(0,0)}{t}$ där $\mathbf{v}$ är enhetsvektorn $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Med $g(t) = f(t/\sqrt{5}, 2t/\sqrt{5})$ kan detta skrivas $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t}$. Vi har

$$g(t) = \frac{\frac{t^2}{5} \cdot \frac{2t}{\sqrt{5}}}{\frac{t^4}{25} + \frac{4t^2}{5}} = \frac{\frac{2t}{\sqrt{5}}}{\frac{t^2}{5} + 4},$$

så

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{t^2}{5} + 4} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

b) Det räcker att visa att f inte är kontinuerlig i origo. (En diff.bar funktion måste vara kontinuerlig.) På koordinataxlarna är $f = 0$, så $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$. Längs parabeln $y = x^2$ gäller $f(x,x^2) = x^4/(x^4+x^4) = 1/2$. Alltså saknar $f(x,y)$ gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$. vsb.

12. Skriv ekvationerna $F(x,y,z,u,v) = 0; G(x,y,z,u,v) = 0$. Enligt implicita funktionssatsen är villkoret att determinanten $F'_uG'_v - F'_vG'_u \neq 0$ i punkten. Vi får $F'_uG'_v - F'_vG'_u = xz(2x - 2u^2v) - 2yv(-2uv^2)$ som blir $= 1 \cdot (2-2) - 2 \cdot (-2) = 4$ i punkten. Villkoret är alltså uppfyllt.

Vi deriverar nu ekvationerna implicit med avseende på y, där $u = u(x,y)$ och $v = v(x,y)$. Resultatet blir

$$2xy + xzu'_y + v^2 + 2yvv'_y = 0,$$
$$x^3z + 2xv'_y - 2uu'_yv^2 - 2u^2vv'_y = 0.$$

Insättning av punkten leder efter förenkling till

$$u'_y + 2v'_y + 3 = 0, \quad \text{och} \quad 1 - 2u'_y = 0.$$

Det följer att $v'_y = -7/4$ i punkten.

13. Det handlar om ett optimeringsproblem med bivillkor. Vi skall söka max och min av $f(x,y) = x^2 + y^2$ (avståndet i kvadrat; ger lättare beräkningar) då $g(x,y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ (bivillkorsekvationen). Villkoret är (Lagranges metod) att ∇f och ∇g är parallella dvs $f'_x g'_y - f'_y g'_x = 0$. Detta ger

$$2x(12x + 16y) - 2y(34x + 12y) = 24x^2 - 36xy - 24y^2 = 0.$$

som är en andragradsekvation för x, nämligen $x^2 - \frac{3}{2}xy - y^2 = 0$, med lösning $x = 2y$ resp. $x = -\frac{1}{2}y$. Insättning av $x = 2y$ i bivillkorsekvationen ger $y^2 = 1$ medan $x = -\frac{1}{2}y$ leder till $y^2 = 16$.

De punkter som erhålles är $\pm(2,1)$ resp. $\pm(2,4)$. I det första fallet blir $f = 4 + 1 = 5$ och i det andra fallet blir $f = 4 + 16 = 20$. Alltså ligger punkterna $\pm(2,1)$ närmast och punkterna $\pm(2,4)$ längst bort från origo.

14. $\nabla f = (4yz - 4x^3, 4xz - 4y^3, 4xy - 4z^3)$, så $\nabla f(1,1,1) = (0,0,0)$, dvs $(1,1,1)$ är en kritisk punkt för f. Andraderivatorna i punkten ges av Hessematrisen

$$D^2 f(1,1,1) = \begin{pmatrix} -12x^2 & 4y & 4z \\ 4z & -12y^2 & 4z \\ 4y & 4x & -12z^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} -12 & 4 & 4 \\ 4 & -12 & 4 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}$$

Vi ska visa att tillhörande kvadratiska form

$$Q(h,k,l) = -12(h^2 + k^2 + l^2) + 8(hk + hl + kl)$$

är *negativt definit*, dvs $Q(h,k,l) \leq 0$ med likhet endast då $(h,k,l) = (0,0,0)$. Nu gäller

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= -4\left(3(h^2 + k^2 + l^2) + 2(hk + hl + kl)\right) \\ &= -4\left[(h-k)^2 + (h-l)^2 + (k-l)^2 + h^2 + k^2 + l^2\right]. \end{aligned}$$

Alla termerna innanför hakparenteserna är ≥ 0 så $Q(h,k,l) \leq 0$.

Om $Q(h,k,l) \leq 0$ måste $h^2 = k^2 = l^2 = 0$, dvs $(h,k,l) = (0,0,0)$. Saken är klar!

15. a) Integralen blir svårare om man börjar med dz. Skriv i stället K som $0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2 - z^2}$, $(x,z) \in D$, där D ges av $x^2 + z^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

Integralen blir nu

$$\iint_D \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-z^2}} y\,dy \right) dxdz = \iint_D \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-x^2-z^2}} dxdz$$
$$= \iint_D \frac{1}{2}(4 - x^2 - z^2)\,dxdz = (\text{polära koordinater för } x \text{ och } z)$$
$$= \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^2 \frac{1}{2}(4 - r^2)\,rdr = \frac{\pi}{4}\left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \pi.$$

b) Allting är symmetriskt i variablerna x, y och z, så $\iiint_K z\,dxdydz$ har också värdet π.

16. Parametrisera kurvan! Med $x = t$, $t : 0 \to 1$, blir $z = t^2$. Den andra ekvationen, $z = 2 - x^2 - 2y^2$, leder efter förenkling till $y = \sqrt{1-t^2}$. Hastighetsvektorn blir

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(t, \sqrt{1-t^2}, t^2) = (1, -t/\sqrt{1-t^2}, 2t),$$

så

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \left(1 + \frac{t^2}{1-t^2} + 4t^2\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Massan blir nu

$$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2-4t^4}\,dt$$

Substitutionerna $u = t^2$ och $v = 2u - 1$ ger integralen $\frac{1}{4}\int_{-1}^1 \sqrt{2-v^2}\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{2-v^2}\,dv$. Substitutionen $v = \sqrt{2}\sin\theta$ ger slutligen integralens värde $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \pi/4$.

17. a) Kriteriet är att matrisen $D\mathbf{F}$ är symmetrisk (detta villkor är ekvivalent med att $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$). Vi beräknar:

$$D\mathbf{F} = \begin{pmatrix} A\ln z & 0 & Ax/z \\ 0 & 2Byz & By^2 \\ 2x/z & 3y^2 & -x^2/z^2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen är symmetrisk precis då $A = 2$ och $B = 3$. Då blir $\mathbf{F} = \left(2x\ln z, 3y^2z, \frac{x^2}{z} + y^3\right) = \nabla\phi$, där potentialfunktionen $\phi = x^2\ln z + y^3z$.

b) Kalla integralen I. Vi kan parametrisera C genom $\mathbf{r}(t) = (1+t, 1, 1+t)$ där $t : 0 \to 1$. Då är $dy = 0$, varför

$$\begin{aligned} I &= \int_C 2x \ln z \, dx + 3y^2 z \, dy + y^3 \, dz = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_C \frac{x^2}{z} \, dz \\ &= \phi(2,1,2) - \phi(1,1,1) - \int_0^1 (1+t) \, dt = 4 \ln 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$