Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud (ändrad 070829)

5B 1107, Differential- och integralkalkyl II, del 2, flervariabel, för F1.
Tentamen tisdag 28 augusti 2007, 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna.
Tentamen består av tio uppgifter à fyra poäng (del A) och sju uppgifter à sex poäng (del B). För godkänt (betyg tre) räcker det att, inklusive maximalt 16 bonuspoäng från lappskrivningar VT 2007, uppnå 32 poäng (från del A och B).
För betyg fyra och fem krävs att man är godkänd och dessutom har uppnått ett tillräckligt antal poäng på del B. 15 poäng räcker till betyg fyra och 28 poäng räcker till betyg fem.

LYCKA TILL!

Del A, tio uppgifter à 4 poäng.

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet vid $(1, -1, 1)$ till nivåytan
   $x^2y + y^2z + z^2x = 1$.
2. $g(x, y) = f(\frac{1}{2}(x^2 - y^2), xy)$ där f är C^2. Beräkna g'_y samt g''_{xy}.
3. Bestäm och karakterisera de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.
4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = xy - y^2$ då $x^2 + y^2 \leq 1$.
5. Bestäm Taylorpolynomet av ordning tre vid punkten $(0, 0)$ för funktionen $f(x, y) = e^{x^2-2y}$.
6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D xy\,dxdy$ där D är triangeln med hörn $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$.
7. Skriv om den upprepade trippelintegralen $\int_0^1 (\int_0^z (\int_0^y f(x, y, z)\,dx)dy)dz$ så att man först integrerar z, sedan y och sist x. (f är kontinuerlig.)
8. Rymdpolära (sfäriska) koordinater ges av $x = r \sin\theta \cos\phi$, $x = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r \cos\theta$, där $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ och $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

   Beskriv mängden $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, $\phi = \frac{1}{4}\pi$ i ord och i koordinaterna x, y, z.

9. Beräkna kurvintegralen $\int_C x\,dx + (x^2+y)\,dy$ längs linjen $y = x$ från origo till $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ och därefter moturs längs enhetscirkeln till $(-1, 0)$.

10. Beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\,dS$ då $\mathbf{F} = (y, -x, z)$ och $\mathcal{S}$ betecknar den del av ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ där $z \geq 0$ och $y \geq 0$. Enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ är uppåtriktad.

Del B, sju uppgifter à 6 poäng:

11. Låt $f(x,y) = x^2y/(x^4+y^2)$ för $(x,y) \neq 0$ och $f(0,0) = 0$.

    a) Beräkna riktningsderivatan $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ i den riktning som ges av $(1,2)$.

    b) Visa att f inte är differentierbar i origo.

12. Visa att i systemet som ges av ekvationerna

$$xy^2 + xzu + yv^2 = 3 \quad \text{och} \quad x^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2$$

    kan u och v lösas ut som funktioner av (x,y,z), nära den punkt i vilken $x = y = z = u = v = 1$, samt beräkna $\partial v/\partial y$ i denna punkt.

13. Bestäm de punkter på kurvan $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ som ligger närmast respektive längst bort från origo.

14. Visa att funktionen $f(x,y,z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$ har ett lokalt maximum i punkten $(1,1,1)$.

15. Beräkna trippelintegralen $\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz$ då K är den del av halvklotet $0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ som ligger i första oktanten, för

    a) $f(x,y,z) = y$ samt b) $f(x,y,z) = z$.

16. En tråd C beskrivs som den del av skärningen mellan de två ytorna $z = 2 - x^2 - 2y^2$ och $z = x^2$ som ligger i första oktanten, från punkten $(0,1,0)$ till punkten $(1,0,1)$. Trådens densitet ges av $f(x,y,z) = xy$. Beräkna trådens massa $\int_C f\,ds$.

17. a) Bestäm de värden på konstanterna A och B för vilka vektorfältet

$$\mathbf{F} = \left(Ax\ln z, By^2z, \frac{x^2}{z} + y^3\right)$$

    är konservativt i halvrummet $z > 0$. Ange en potentialfunktion.

    b) C betecknar linjestycket från $(1,1,1)$ till $(2,1,2)$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_C 2x\ln z\,dx + 2y^2z\,dy + y^3\,dz.$$