Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

SF1603, Differential- och integralkalkyl II, del 2, flervariabel, för F1.
Tentamen onsdag 27 maj 2009, 14.00-19.00

1. Låt $F(x, y, z) = \sin(x + y - 2z) + x + 2y + 6z$.

   a) Bestäm tangentplanet till ytan $F(x, y, z) = 9$ i punkten $(1, 1, 1)$.

   b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till F i punkten $(1, 1, 1)$.

   Förslag till lösning: a) Vi vet att normalen till tangentplanet har riktningsvektor $\mathbf{N} = \nabla F(1, 1, 1)$. Uträkning ger $\mathbf{N} = (2, 3, 4)$ så tangentplanet har ekvation $(2, 3, 4) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$, eller $2x + 3y + 4z = 9$.

   b) Vi söker $P_1 = F(1, 1, 1) + \nabla F(1, 1, 1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 2x + 3y + 4z$.

2. Transformera uttrycket $xz'_x + yz'_y$ då $z = z(x, y)$, $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ och $v = xy$.

   Förslag till lösning: Enligt kedjeregeln gäller

   $$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = xz'_u + yz'_v, \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = -yz'_u + xz'_v,$$

   så $xz'_x + yz'_y$ blir

   $$x(xz'_u + yz'_v) + y(-yz'_u + xz'_v) = (x^2 - y^2)z'_u + 2xyz_v = 2(uz'_u + vz'_v).$$

3. Bestäm och karakterisera de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + 2y^3$.

   Förslag till lösning: $\nabla f = (6x - 6y, -6x + 6y^2) = (0, 0)$ precis då $x = y = y^2$, vilket ger de kritiska punkterna punkterna $(0, 0)$ och $(1, 1)$.

   Andraderivatorna blir $A = f''_{xx} = 6$, $B = f''_{xy} = -6$ och $C = f''_{yy} = 12y$. Vi använder andraderivatetestet. Diskriminanten $AC - B^2 = 72y - 36$ är < 0 i origo, en sadelpunkt. I $(1, 1)$ gäller $AC - B^2 > 0$. Eftersom $A > 0$ är $(1, 1)$ en lokal minpunkt.

4. Betrakta funktionen $f(x, y) = x + y$ på ellipsskivan $2x^2 + y^2 - 6 \leq 0$. Förklara (ange en sats) varför man i förväg vet att f antar ett största och ett minsta värde på ellipsen, samt bestäm dessa värden.

   Förslag till lösning: Mängden är *sluten:* randen ingår, och *begränsad :* $|x| \leq \sqrt{3}$, $|y| \leq \sqrt{6}$. Alltså är mängden kompakt. Den givna funktionen är kontinuerlig (överallt), så största och minsta värden antas på mängden. (Sats 4, sid. 41 i läroboken.)

Eftersom $\nabla f = (1,1)$ saknas kritiska punkter. Vi måste då undersöka f på randen, $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 6 = 0$. Enligt Lagranges metod måste ∇f och ∇g vara parallella i en ev extrempunkt: $f'_x g'_y - f'_y g'_x = 0$, vilket ger $y = 2x$. Insättning i bivillkorsekvationen $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 6 = 0$ ger $x2 = 1$ och därmed punkterna $\pm(1,2)$. Största värdet blir 3 och minsta värdet -3.

5. Genom ekvationen $x^3y - 2xy^3 = 4$ definieras y som en funktion av x i en omgivning av punkten $(2,1)$.

   a) Varför det?

   b) Bestäm derivatan av nämnda funktion i punkten.

   Förslag till lösning: a) Villkoret är att $(x^3y - 2xy^3)'_y \neq 0$ i punkten. Uträkning ger derivatan $x^3 - 6xy^2$, vilken är skild från 0 i $(2,1)$.

   b) Implicit derivering av ekvationen m.a.p. x ger $3x^2y + x^3y' - 2y^3 - 6xy^2y' = 0$. Insättning av punkten ger $12 + 8y' - 2 - 12y' = 0$, varav $y' = 5/2$.

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (2x - y)\,dxdy$ då D är det område i planet som begränsas av linjerna $y = x$, $y = x - 1$, $y = 0$ och $y = 1$.

   Förslag till lösning: En skiss av området antyder att det är lättare att integrera map x först. Då gäller $y \leq x \leq y + 1$, $0 \leq y \leq 1$ och vi får den upprepade integralen

$$\int_0^1 \left(\int_{x=y}^{y+1} (2x - y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[x^2 - xy\right]_{x=y}^{y+1} dy = \int_0^1 (y+1)\,dy = \frac{3}{2}.$$

7. Låt $R > 0$. Visa (dvs beräkna) att kurvan $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ har krökning $1/R$.

   Förslag till lösning: Vi använder formeln $\kappa = |y''|/(1 + (y')^2)^{3/2}$. Det gäller att $y' = -x/\sqrt{R^2 - x^2}$, vilket ger $\sqrt{1 + (y')^2} = R/\sqrt{R^2 - x^2}$.

   Man finner efter förenkling att $y'' = -R^2/(R^2 - x^2)^{3/2}$. Formeln för krökning ger nu

$$\kappa(x) = \frac{\frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}}{(\frac{R^2}{R^2-x^2})^{3/2}} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

8. Beräkna $\int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz$ om C är skruvlinjen $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ från $(1,0,0)$ till $(1,0,2\pi)$.

Förslag till lösning: Klart att $t : 0 \to 2\pi$. Kurvintegralen blir

$$\int_0^{2\pi} (\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t + t)\, dt = \int_0^{2\pi} \quad dt = 2\pi^2.$$

9. Låt $\mathbf{F} = (xy^2, yz^2, zx^2)$. Ange vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\operatorname{rot}\operatorname{div}\mathbf{F}$, $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\operatorname{grad}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}$.

   Förslag till lösning: Man kan inte bilda rot div, grad rot eller grad grad. Det första uttrycket återstår. Uträkning ger $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$ (gäller alltid).

10. Beräkna $\iint_Y (4x + 5y, 2y - 5x, z - 8x^2 - 4y^2) \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, där Y är den del av paraboloiden $x^2 + y^2 + z = 1$ som ligger ovanför xy-planet, med uppåtriktad normal.

    Förslag till lösning: Låt D beteckna mängden $x^2+y^2 \leq 1$. Då är $z(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ för $(x, y) \in D$. Vi har normalriktning $\mathbf{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (2x, 2y, 1)$, så $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = (4x+5y, 2y-5x, z-8x^2-4y^2)\cdot(2x, 2y, 1) = z-5xy = 1 - x^2 - y^2 - 5xy$ på ytan.

    Flödesintegralen blir

$$\iint_D (1 - x^2 - y^2 - 5xy)\, dx\, dy = (\text{symmetri})$$
$$= \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = (\text{pol. koord.}) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (1 - r^2)\, r dr = \frac{\pi}{2}.$$

11. Låt $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och sätt $f(0, 0) = 0$.

    a) Använd riktningsderivatans definition och visa att för varje riktning $\mathbf{v}$ (med $|\mathbf{v}| = 1$) existerar riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(0, 0)$.

    b) Visa att f inte är kontinuerlig i $(0, 0)$.

    c) Är f differentierbar i $(0, 0)$?

    Förslag till lösning: a) Med $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$ gäller

    $f'_{\mathbf{v}}(0, 0) = \lim_{t\to 0}(f(t\alpha, t\beta) - f(0, 0))/t$ enl. definitionen. För $t \neq 0$ är

$$f(t\alpha, t\beta) = \frac{(t\alpha)^2 t\beta}{(t\alpha)^4 + (t\beta)^2} = \frac{\alpha^2\beta t}{t^2\alpha^4 + \beta^2},$$

    så differenskvoten är $\alpha^2\beta/(t^2\alpha^4 + \beta^2)$. Om $\beta = 0$ blir detta 0 för alla t. Annars $\to \alpha^2/\beta$ då $t \to 0$.

    b) Längs kurvan $y = x^2$ är $f = f(x, x^2) = 1/2$. Det går *inte* mot $0 = f(0, 0)$ då $x \to 0$. Alltså är f inte kontinuerlig i $(0, 0)$.

    c) Nej! En differentierbar funktion måste vara kontinuerlig.

12. Visa att funktionen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$ har ett globalt minimum i origo. Antas minimivärdet i någon annan punkt?

    Förslag till lösning: $-xy$ är den dubbla produkten i $\frac{1}{2}(x-y)^2$ och motsvarande för övriga termer. Alltså blir $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 \geq 0$ överallt. Värdet 0 antas i origo, så det är ett globalt minimum.

    $f(x, y, z) = 0$ precis då $x - y = y - z = z - y = 0$, dvs då $x = y = z$ (en linje).

13. För vilka (reella) värden på konstanten a har ekvationen
    $x^2 + xy + y^2 + a = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ någon lösning?

    Förslag till lösning: De a som kan förekomma är elementen i värdemängden V_f till $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - (x^2 + xy + y^2)$. Vi bestämmer därför V_f. Observera först att f har definitionsmängden $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

    Vi har $f'_x = -x/\sqrt{1 - x^2 - y^2} - 2x - y = 0$ precis då $-x = (2x+y)\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Analogt gäller $f'_y = 0$ precis då $-y = (x + 2y)\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. I en inre punkt är $\sqrt{1 - x^2 - y^2} \neq 0$, varför $x/y = (2x + y)/(x + 2y)$, som ger $x^2 = y^2$. $y = \pm x$ i ekvationen $f'_x = 0$ ger $-x = 3x$ respektive $-x = x$. I båda fallen gäller $x = 0$ så $(0, 0)$ är den enda inre kritiska punkten. Vi har $f(0, 0) = 1$.

    På randen gäller $f = -(1 + xy)$. Max och minvärden erhålles då x och $y = \pm 1/\sqrt{2}$, så att $xy = \pm 1/2$ och f antar värdena $-1/2$ respektive $-3/2$. Alltså antar f alla värden i intervallet $[-\frac{3}{2}, 1] = V_f$ (enligt satsen om mellanliggande värden).

14. Bestäm de reella tal a och b för vilka den generaliserade integralen

    $$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2)^a (1 + x^2 + y^2 + z^2)^b}$$

    konvergerar.

    Förslag till lösning: Det finns två problem: (i) integranden kan bli oändlig i origo och (ii) integrationsområdet är oändligt.

    För att få konvergens i (i) behöver vi bara undersöka integralen $\iiint_{|\mathbf{r}| \leq 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2)^a}$. Den konvergerar precis då $\iint_{|\mathbf{r}| \leq 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^a} = 2\pi \int_0^1 r^{1-2a}\,dr$ konvergerar, dvs för $1 - 2a > -1$ eller $a < 1$.

    I fall (ii) måste vi undersöka när $\iiint_{|\mathbf{r}| \geq 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2)^a (1+x^2+y^2+z^2)^b}$ konvergerar. Detta är fallet precis då $\iiint_{|\mathbf{r}| \geq 1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^b}$ konvergerar. Övergång till sfäriska koordinater ger $4\pi \int_1^\infty r^{2-2b}\,dr$, med konvergens precis då $2 - 2b < -1$ dvs $b > 3/2$.

Svar: $a < 1$ och $b > 3/2$.

15. Beräkna arean av området innanför *asteroidkurvan* $x^{2/5} + y^{2/5} = 1$, t ex med hjälp av areaformeln. **Förslag till lösning:** Kalla kurvan C. Den kan parametriseras som $(x, y) = (\cos^5 t, \sin^5 t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Enligt areaformeln är den sökta arean $A = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-\sin^5 t \cdot 5\cos^4 t(-\sin t) + \cos^5 t \cdot 5\sin^4 t\cos t))\,dt$$
$$= \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} \cos^4 t\sin^4 t\,dt = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos^2 2t}{4}\right)^2\,dt$$
$$= \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{64}\left(\frac{3}{2} - 2\cos 4t + \frac{1}{2}\cos 8t\right)\,dt = \frac{15\pi}{128}.$$

16. Beräkna $\int_C (e^x \sin y + 3y)\,dx + (e^x\cos y + 2x - 2y)\,dy$ moturs ett varv runt ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$.

    Förslag till lösning: Vi kan skriva integralen

$$I = \int_C (e^x\sin y + 2y)\,dx + (e^x\cos y + 2x)\,dy + \int_C y\,dx - 2y\,dy.$$

Fältet i den första integralen är konservativt med potentialfunktion $e^x\sin y + 2xy$. Eftersom kurvan är sluten är denna integral $= 0$. Den andra integralen är också $= 0$ av symmetriskäl (udda funktioner integrerade över symmetriska intervall). Det följer att $I = 0$.

17. Beräkna $\iint_Y \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS$ då Y är ytan $x^2+y^2+2(z-1)^2 = 6$, $z \ge 0$, $\widehat{\mathbf{N}}$ dess yttre (bort från origo) enhetsnormal och $\mathbf{F} = (xz - y^3\cos z, x^3e^z, xyze^{x^2+y^2+z^2})$.

    Förslag till lösning: För $z = 0$ får vi kurvan $C : x^2 + y^2 = 4$, med orientering moturs. C är rand till Y. Det är också ytan (området) D : $x^2 + y^2 \le 4$ i xy-planet. D har yttre enhetsnormal $\widehat{\mathbf{N}} = (0, 0, 1)$. Två tillämpningar av Stokes' sats ger

$$\iint_Y \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dxdy$$

Uträkning visar att $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (..., ..., 3x^2e^z + 3y^2\cos z)$ vilket blir $(..., ..., 3(x^2 + y^2))$ på D. Alltså blir den sökta integralen

$$\iint_D (..., ..., 3(x^2 + 3y^2))\cdot(0, 0, 1)\,dxdy = \iint_D 3(x^2 + 3y^2)\,dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 3r^2\,rdrd\phi = 2\pi\left[3\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 24\pi.$$