Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

SF1603, Differential- och integralkalkyl II, del 2, flervariabel, för F1.
Tentamen onsdag 27 maj 2009, 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Svar och beräkningar skall motiveras!

Tentamensskrivningen består av två delar: del I omfattar 40 poäng och del II 42 poäng. För godkänt (= betyg E) krävs totalt 32 poäng på del I-II plus ev. bonus från lappskrivningar (max. 12 poäng). Betyg D erhålles vid uppnådda 37 poäng (på del I-II, inklusive bonus). För högre betyg måste man vara godkänd och ha uppnått ett tillräckligt antal poäng på del II: 14, 21 respektive 28 poäng (på del II) räcker till betygen C, B respektive A.

Om man på tentamen har uppnått 30 poäng (inklusive bonus), med sex eller fler uppgifter som är *väsentligen rätt*, ges betyg Fx, med möjlighet till komplettering. Denna skall äga rum senast en månad efter tentamen. Endast betyg E (godkänd) kan erhållas.

Del I, tio uppgifter à 4 poäng.

1. Låt $F(x, y, z) = \sin(x + y - 2z) + x + 2y + 6z$.

   a) Bestäm tangentplanet till ytan $F(x, y, z) = 9$ i punkten $(1, 1, 1)$.

   b) Bestäm Taylorpolynomet av grad 1 till F i punkten $(1, 1, 1)$.

2. Transformera uttrycket $xz'_x + yz'_y$ då $z = z(x, y)$, $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ och $v = xy$.

3. Bestäm och karakterisera de kritiska punkterna till funktionen

   $f(x, y) = 3x^2 - 6xy + 2y^3$.

4. Betrakta funktionen $f(x, y) = x+y$ på ellipsskivan $2x^2+y^2-6 \leq 0$. Förklara (ange en sats) varför man i förväg vet att f antar ett största och ett minsta värde på ellipsen, samt bestäm dessa värden.

5. Genom ekvationen $x^3y - 2xy^3 = 4$ definieras y som en funktion av x i en omgivning av punkten $(2, 1)$.

   a) Varför det?

   b) Bestäm derivatan av nämnda funktion i punkten.

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (2x - y)\, dxdy$ då D är det område i planet som begränsas av linjerna $y = x$, $y = x - 1$, $y = 0$ och $y = 1$.

7. Låt $R > 0$. Visa (dvs beräkna) att kurvan $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ har krökning $1/R$.

8. Beräkna $\int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz$ om C är skruvlinjen $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ från $(1,0,0)$ till $(1,0,2\pi)$.

9. Låt $\mathbf{F} = (xy^2, yz^2, zx^2)$. Ange vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\operatorname{rot}\operatorname{div}\mathbf{F}$, $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\operatorname{grad}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}$.

10. Beräkna $\iint_Y (4x+5y, 2y-5x, z-8x^2-4y^2)\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS$, där Y är den del av paraboloiden $x^2+y^2+z=1$ som ligger ovanför xy-planet, med uppåtriktad normal.

Del II, sju uppgifter à 6 poäng:

11. Låt $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ för $(x,y) \neq (0,0)$ och sätt $f(0,0) = 0$.

    a) Använd riktningsderivatans definition och visa att för varje riktning $\mathbf{v}$ (med $|\mathbf{v}| = 1$) existerar riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(0,0)$.

    b) Visa att f inte är kontinuerlig i $(0,0)$.

    c) Är f differentierbar i $(0,0)$?

12. Visa att funktionen $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ har ett globalt minimum i origo. Antas minimivärdet i någon annan punkt?

13. För vilka (reella) värden på konstanten a har ekvationen
    $x^2+xy+y^2+a = \sqrt{1-x^2-y^2}$ någon lösning?

14. Bestäm de reella tal a och b för vilka den generaliserade integralen

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2)^a(1+x^2+y^2+z^2)^b}$$

    konvergerar.

15. Beräkna arean av området innanför *asteroidkurvan* $x^{2/5}+y^{2/5} = 1$, t ex med hjälp av areaformeln.

16. Beräkna $\int_C (e^x\sin y + 3y)\,dx + (e^x\cos y + 2x - 2y)\,dy$ moturs ett varv runt ellipsen $4x^2+y^2 = 4$.

17. Beräkna $\iint_Y \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\widehat{\mathbf{N}}\,dS$ då Y är ytan $x^2+y^2+2(z-1)^2 = 6$, $z \geq 0$, $\widehat{\mathbf{N}}$ dess yttre (bort från origo) enhetsnormal och $\mathbf{F} = (xz-y^3\cos z, x^3e^z, xyze^{x^2+y^2+z^2})$.

LYCKA TILL!

Lösningar och resultat anslås snarast möjligt på kursens hemsida, eller på
http://www.math.kth.se/~kolsrud/FlervariabelVT09/