Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

SF1603, Differential- och integralkalkyl II, del 2, flervariabel, för F1.
Tentamen torsdag 20 augusti 2009, 14.00-19.00
Förslag till lösningar.

1. Bestäm tangentplanet till ytan $x^3z + x^2 + z^3y = 1$ i punkten $(1, -1, 1)$.

   Lösning: Sätt $F(x, y, z) = x^3z + x^2 + z^3y$. Då ges tangentplanets ekvation av $\mathbf{N} \cdot (x - 1, y + 1, z - 1) = 0$, där normalen $\mathbf{N} = \nabla F(1, -1, 1)$. Uträkning ger $\nabla F = (3x^2z + 2x, z^3, x^3 + 3z^2y)$, så $\mathbf{N} = (5, 1, -2)$ och planets ekvation blir $5(x - 1) + y + 1 - 2(z - 1) = 0$, eller $5x + y - 2z = 2$.

2. Beräkna g'_x och g'_y då $g(x, y) = f(y^2 - x, x)$ och f är C^1.

   Lösning: Vi sätter $u = y^2 - x$, $v = x$. Enligt kedjeregeln gäller då

   $g'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = -f'_u + f'_v$ och $g'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = 2y f'_u$.

3. Låt $f(x, y) = x/(1 + y)$.

   a) Beräkna $D_{\mathbf{v}} f(0, 0)$ i den riktning som ges av vektorn $(1, -1)$.

   b) Finns det någon riktning så att $D_{\mathbf{v}} f(0, 0) = \frac{1}{2}$?

   Lösning: a) Den givna vektorn $(1, -1)$ har längd $\sqrt{2}$. Låt $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ beteckna motsvarande enhetsvektor. f är C^1 i punkten, varför riktningsderivatan blir $\nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{v}$. $\nabla f = (\frac{1}{1+y}, -\frac{x}{(1+y)^2})$ så $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$ och riktningsderivatan blir $(1, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   b) För varje enhetsvektor $\mathbf{u}$ gäller $|D_{\mathbf{u}} f(0, 0)| \le |\nabla f(0, 0)| = 1$ och alla värden i intervallet $[-1, 1]$ antas för något $\mathbf{u}$. $\frac{1}{2} \in [-1, 1]$ så svaret är JA!

4. Finn och karakterisera de kritiska punkterna till $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

   Lösning: $\nabla f = (6x^2 - 6y, -6x + 6y)$. Kritiska punkter måste uppfylla $y = x^2$ och $y = x$ vilket ger $(0, 0)$ och $(1, 1)$. Andraderivatorna blir $A = f_{xx} = 12x$, $B = f_{xy}0 - 6$ och $C = f_{yy} = 6$. Diskriminanten $\Delta = AC - B^2 = 72x - 36$, så $\Delta < 0$ i origo, som är en sadelpunkt och därmed ingen kritisk punkt, medan $\Delta > 0$ i $(1, 1)$. Det är ett lokalt minimum eftersom $A > 0$ i punkten.

5. Bestäm största och minsta värden av funktionen $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ på triangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 0)$ (randen ingår).

Lösning: Vi söker först kritiska punkter i det inre av området: $\nabla f = (y(1-2x-y), x(1-x-2y))$. $f'_x = 0$ ger $y = 0$ som förkastas (ej i det inre) samt $2x + y = 1$. $f'_y = 0$ ger $x = 0$ som förkastas (ej i det inre) samt $x + 2y = 1$. Vi ser att $x = y$ och får punkten $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Vi får $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$. Detta är funktionens största värde eftersom funktionen antar värdet 0 överallt på randen. 0 är följaktligen det minsta värdet.

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x^3 - y)\, dxdy$ då D är området i uppgift 5.

   Lösning: Integralen blir (upprepad integrering)

$$\int_0^1 \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{y=0}^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^3 - x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right) dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right]_0^1 = -\frac{7}{60}.$$

7. Definiera med figur sfäriska (rymdpolära) koordinater. Uttryck den del av klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ där $0 \leq y \leq x$ och $z \geq 0$ i dessa koordinater.

   Lösning: $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r\cos\theta$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$, $\theta : 0 \to \pi$ och $\phi : 0 \to 2\pi$ (maximalt). $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ blir $0 \leq r \leq 9$. $0 \leq y \leq x$ betyder att den polära vinkeln ϕ uppfyller $0 \leq \phi \leq \pi/4$. $z \geq 0$ blir $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

8. Beräkna $\int_C y\, dx - x\, dy$ om C är enhetscirkeln moturs från $(1, 0)$ till $(0, -1)$.

   Lösning: Kurvan parametriseras med $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t : 0 \to 3\pi/4$. Integralen blir

$$\int_0^{3\pi/4} (\sin t \cdot (-\sin t) - \cos t \cdot \cos t)\; dt = \int_0^{3\pi/4} -1\, dt = -3\pi/4.$$

9. Låt $\mathbf{F} = (yz, xz, xy + y^2)$. Beräkna $\mathbf{F}$:s divergens och rotation. Är $\mathbf{F}$ konservativt?

   Lösning: *Rotationen* av vektorfältet är $\nabla \times \mathbf{F}$. Uträkning ger svaret $(2y, 0, 0)$.

   Divergensen av vektorfältet är $\nabla \cdot \mathbf{F} = (0, 0, 0)$.

   Eftersom $\operatorname{rot} \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ är fältet *inte konservativt.*

10. Beräkna flödesintegralen $\iint_Y (y^2, x^2, 2z) \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, där Y är den del av planet $z + 2x + 2y = 2$ där $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, med uppåtriktad enhetsnormal $\widehat{\mathbf{N}}$.

Lösning: Ytan parametriseras som $z = 2(1 - x - y)$, $(x, y) \in D$, där D ges av $x \geq 0$, $y \geq 0$, $1 - x - y \geq 0$ (området i uppgift 5 och 6). Den onormaliserade uppåtpekande normalen är $\mathbf{N} = (2, 2, 1)$. Flödesintegralen blir

$$\begin{aligned}
&\iint_D (y^2, x^2, 2(1-x-y)) \cdot (2,2,1)\, dxdy \\
&= \iint_D 2(x^2 + y^2 + 1 - x - y)\, dxdy \\
&= \int_0^1 \left[2x^2 y + \frac{2}{3} y^3 + 2y(1-x) - y^2 \right]_{y=0}^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(2x^2(1-x) + \frac{2}{3}(1-x)^3 + 2(1-x)^2 - (1-x)^2 \right) dx = ... = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

11. Givet funktionen $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Visa att f är kontinuerlig i origo. Visa också att de partiella derivatorna $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$ existerar samt beräkna dem. Undersök slutligen om f är differentierbar i origo.

Lösning: Se uppgift 11, tentan (5B1107) 030827.

12. Ligger hela ytan $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + 2x + 2y + 3$ på samma sida om xy-planet?

Lösning: Svaret är ja! Beteckna med $f(x, y)$ funktionen ovan. Det gäller att visa att $f \geq 0$ på definitionsmängden $x^2 + y^2 \leq 1$. Se vidare uppgift 12 på tentan 080821.

13. Låt $f(x, y) = x^4 - 2ax^2y^2 + y^4$. För vilka (reella) värden på konstanten a har f ett globalt minimum i origo?

Lösning: Se uppgift 13, tentan (5B1107) 030527.

14. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y^2\, dxdy$ där D bestäms av $1 \leq xy \leq 4$ och $0 \leq x \leq y \leq 4x$.

Lösning: Se uppgift 14 på tentan 070525.

15. Den del av kurvan $x^3 + y^3 = 3xy$ som ligger i första kvadranten är rand till ett begränsat område D, Descartes löv. Man kan visa att kurvan inte skär sig själv. Beräkna arean av D genom att använda lutningen t som parameter: $y = tx$ ger $x = 3t/(1 + t^3)$ och $y = 3t^2/(1 + t^3)$.

Lösning: Se uppgift 16, tentan (5B1107) 030827.

16. Beräkna linjeintegralen $\int_C 3yzdx + xzdy$ då C är skärningskurvan mellan cylindern $z = x^2 + 1$ och paraboloiden $z = 2x^2 + y^2$. SetT från Origo genomlöps Kurvan mEdurS.

Lösning: Se uppgift 17, tentan (5B1107) 030827.

17. (Frenets formler.) Givet en C^2-kurva i $\mathbb{R}^3$ med enhetstangent $\widehat{T}$ och enhetsnormal $\widehat{N}$ så att $(\widehat{T}, \widehat{N})$ är ett tvådimensionellt positivt orienterat ON-system. Kurvan är båglängdsparametriserad: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Som bekant gäller $d\widehat{T}/ds = \kappa\widehat{N}(s)$, där $\kappa(s) \geq 0$ är kurvans krökning. Inför den s.k. *binormalen* $\widehat{B} = \widehat{T} \times \widehat{N}$.

Visa att det finns en funktion $\tau(s)$ (kurvans *torsion*) så att $\frac{d\widehat{B}}{ds} = -\tau\widehat{N}$. Visa också att $\frac{d\widehat{N}}{ds} = -\kappa\widehat{T} + \tau\widehat{B}$.

Ledning: $\widehat{T} = \widehat{N} \times \widehat{B}$ och $\widehat{N} = \widehat{B} \times \widehat{T}$.

Lösning: Eftersom $\widehat{B}$ är en enhetsvektor är $d\widehat{B}/ds$ ortogonal mot $\widehat{B}$. Vi har

$$\frac{d\widehat{B}}{ds} = \frac{d\widehat{T}}{ds} \times \widehat{N} + \widehat{T} \times \frac{d\widehat{N}}{ds} = \kappa\widehat{N} \times \widehat{N} + \widehat{T} \times \frac{d\widehat{N}}{ds} = \widehat{T} \times \frac{d\widehat{N}}{ds}$$

så $\frac{d\widehat{B}}{ds}$ är ortogonal mot $\widehat{T}$ också. Alltså går $\frac{d\widehat{B}}{ds}$ i enhetsnormalens riktning, vilket ger $\frac{d\widehat{B}}{ds} = -\tau\widehat{N}$ för någon funktion $\tau(s)$.

Derivering av relationen $\widehat{N} = \widehat{B} \times \widehat{T}$ ger

$$\frac{d\widehat{N}}{ds} = \frac{d\widehat{B}}{ds} \times \widehat{T} + \widehat{B} \times \frac{d\widehat{T}}{ds} = -\tau\widehat{N} \times \widehat{T} + \widehat{B} \times \kappa\widehat{N} = -\kappa\widehat{T} + \tau\widehat{B}.$$