Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

SF1603, Differential- och integralkalkyl II, del 2, flervariabel, för F1.
Tentamen torsdag 20 augusti 2009, 14.00-19.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Svar och beräkningar skall motiveras!

Tentamensskrivningen består av två delar: del I omfattar 40 poäng och del II 42 poäng. För godkänt (= betyg E) krävs totalt 32 poäng på del I-II plus ev. bonus från lappskrivningar (max. 12 poäng). Betyg D erhålles vid uppnådda 37 poäng (på del I-II, inklusive bonus). För högre betyg måste man vara godkänd och ha uppnått ett tillräckligt antal poäng på del II: 14, 21 respektive 28 poäng (på del II) räcker till betygen C, B respektive A.

Om man på tentamen har uppnått 30 poäng (inklusive bonus), med sex eller fler uppgifter som är *väsentligen rätt*, ges betyg Fx, med möjlighet till komplettering. Denna skall äga rum senast en månad efter tentamen. Endast betyg E (godkänd) kan erhållas.

Del I, tio uppgifter à 4 poäng.

1. Bestäm tangentplanet till ytan $x^3z + x^2 + z^3y = 1$ i punkten $(1, -1, 1)$.

2. Beräkna g'_x och g'_y då $g(x, y) = f(y^2 - x, x)$ och f är C^1.

3. Låt $f(x, y) = x/(1 + y)$.
   a) Beräkna $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ i den riktning som ges av vektorn $(1, -1)$.
   b) Finns det någon riktning så att $D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \frac{1}{2}$?

4. Finn och karakterisera de kritiska punkterna till $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

5. Bestäm största och minsta värden av funktionen $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ på triangeln med hörn i punkterna $(0, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 0)$ (randen ingår).

6. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x^3 - y)\, dxdy$ då D är området i uppgift 5.

7. Definiera med figur sfäriska (rymdpolära) koordinater. Uttryck den del av klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ där $0 \leq y \leq x$ och $z \geq 0$ i dessa koordinater.

8. Beräkna $\int_C y\, dx - x\, dy$ om C är enhetscirkeln moturs från $(1, 0)$ till $(0, -1)$.

9. Låt $\mathbf{F} = (yz, xz, xy + y^2)$. Beräkna $\mathbf{F}$:s divergens och rotation. Är $\mathbf{F}$ konservativt?

10. Beräkna flödesintegralen $\iint_Y (y^2, x^2, 2z) \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$, där Y är den del av planet $z + 2x + 2y = 2$ där $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, med uppåtriktad enhetsnormal $\widehat{\mathbf{N}}$.

Del II, sju uppgifter à 6 poäng:

11. Givet funktionen $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. Visa att f är kontinuerlig i origo. Visa också att de partiella derivatorna $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$ existerar samt beräkna dem. Undersök slutligen om f är differentierbar i origo.

12. Ligger hela ytan $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + 2x + 2y + 3$ på samma sida om xy-planet?

13. Låt $f(x, y) = x^4 - 2ax^2y^2 + y^4$. För vilka (reella) värden på konstanten a har f ett globalt minimum i origo?

14. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D y^2\, dxdy$ där D bestäms av $1 \leq xy \leq 4$ och $0 \leq x \leq y \leq 4x$.

15. Den del av kurvan $x^3 + y^3 = 3xy$ som ligger i första kvadranten är rand till ett begränsat område D, Descartes löv. Man kan visa att kurvan inte skär sig själv. Beräkna arean av D genom att använda lutningen t som parameter: $y = tx$ ger $x = 3t/(1 + t^3)$ och $y = 3t^2/(1 + t^3)$.

16. Beräkna linjeintegralen $\int_C 3yzdx + xzdy$ då C är skärningskurvan mellan cylindern $z = x^2 + 1$ och paraboloiden $z = 2x^2 + y^2$. SetT från Origo genomlöps Kurvan mEdurS.

17. (Frenets formler.) Givet en C^2-kurva i $\mathbb{R}^3$ med enhetstangent $\widehat{T}$ och enhetsnormal $\widehat{N}$ så att $(\widehat{T}, \widehat{N})$ är ett tvådimensionellt positivt orienterat ON-system. Kurvan är båglängdsparametriserad: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Som bekant gäller $d\widehat{T}/ds = \kappa\widehat{N}(s)$, där $\kappa(s) \geq 0$ är kurvans krökning. Inför den s.k. *binormalen* $\widehat{B} = \widehat{T} \times \widehat{N}$.

    Visa att det finns en funktion $\tau(s)$ (kurvans *torsion*) så att $\frac{d\widehat{B}}{ds} = -\tau\widehat{N}$. Visa också att $\frac{d\widehat{N}}{ds} = -\kappa\widehat{T} + \tau\widehat{B}$.

    Ledning: $\widehat{T} = \widehat{N} \times \widehat{B}$ och $\widehat{N} = \widehat{B} \times \widehat{T}$.

LYCKA TILL!