

Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

SF1603, Differential- och integralkalkyl II, del 2, flervariabel, för F1.
Tentamen fredag 30 maj 2012, 8.00-13.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Svar och beräkningar skall motiveras!

Tentamensskrivningen består av två delar: del I omfattar 40 poäng och del II 42 poäng. För godkänt (= betyg E) krävs totalt 32 poäng på del I-II plus ev. bonus från lappskrivningar (max. 12 poäng). Betyg D erhålles vid uppnådda 37 poäng (på del I-II, inklusive bonus). För högre betyg måste man vara godkänd och ha uppnått ett tillräckligt antal poäng på del II: 14, 21 respektive 28 poäng (på del II) räcker till betygen C, B respektive A.

Om man på tentamen har uppnått 30 poäng (inklusive bonus), med sex eller fler uppgifter som är *väsentligen rätt*, ges betyg Fx, med möjlighet till komplettering. Denna skall äga rum senast en månad efter tentamen. Endast betyg E (godkänd) kan erhållas.

Del I, tio uppgifter à 4 poäng.

1. Bestäm tangentplanet till ytan $x^2 - y^3 + z^2 = 3$ i punkten $(1, -1, -1)$.
2. Beräkna $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x^2 - y^2, 2xy)$ där f har kontinuerliga derivator av ordning 2.
3. Finn och karakterisera de kritiska punkterna till $f(x, y) = 6y^4 - 24xy + 8x^3$.
4. Bestäm största och minsta värden av funktionen $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ på den slutna triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$.
5. Betrakta ekvationen $x + y + x^4 + y^4 = 1$. Visa att man i någon omgivning till $(0, 0)$ kan lösa ut y som funktion av x .
6. Anta att den differentierbara funktionen f uppfyller $xf'_x - yf'_y = 0$. Visa att $xy = 1$ är en nivåkurva till f .
7. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D (x^3 + y) dx dy$ då D är triangeln med hörn i $(-1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 0)$.
8. Skriv om den upprepade trippelintegralen $\int_0^1 (\int_0^z (\int_0^y f(x, y, z) dx) dy) dz$ så att man först integrerar z , sedan y och sist x . (f är kontinuerlig.)
9. Beräkna $\int_C (x^3 - x^2 y) dx + xy^2 dy$ om C följer cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ moturs från $(2, 0)$ till $(-2, 0)$.

10. Låt f vara en funktion och $\mathbf{F}$ ett vektorfält, båda C^2 i tre dimensioner. Visa att $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \mathbf{0}$ och $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$.

Del II, sju uppgifter à 6 poäng:

11. Låt $f(x, y) = \frac{(x-y)^3}{x^2+y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ och $f(0, 0) = 0$. Visa att f är kontinuerlig och har derivator i varje riktning. Är f differentierbar?
12. a) Ange och skissera definitionsmängden till funktionen
 $f(x, y) = \sqrt{1 - xy} + \sqrt{1 - x + y} + \sqrt{1 + x - y}$.
b) f är en begränsad funktion. Hur ser man det?
13. Visa att i ekvationerna $xe^y + uz - \cos v = 2$ och $u \cos y + x^2v - yz^2 = 1$ kan u och v lösas ut som C^1 -funktioner av (x, y, z) nära den punkt där $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ och $(u, v) = (1, 0)$. Beräkna också derivatan u'_z i punkten.
14. a) Undersök om $f(x, y) = xye^{-xy}$, $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$, antar största och minsta värden och bestäm dem i så fall.
b) Vad händer om vi i stället betraktar funktionen x^2ye^{-xy} ?
15. Man vet att kurvan $4x^4 + 4x^3y + y^4 = 1$ är sluten. Bestäm dess projektion på x -axeln.
16. Beräkna integralen

$$\iint (x^4 - y^4 + 3z^4 + y^3 + z^2 - x + 3y) dS$$

över sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

17. Beräkna $\iint_Y \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$, då Y är den del av ytan $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$ som ligger ovanför (x, y) -planet, $\hat{\mathbf{N}}$ är den yttre enhetsnormalen till Y och $\mathbf{F} = (y^2 \cos xz, x^3 e^{yz}, e^{-xyz})$.