Institutionen för Matematik, KTH
Torbjörn Kolsrud

SF1603, Differential- och integralkalkyl II, del 2, flervariabel, för F1. Tentamen 22 maj 2013. Förslag till lösningar.

1. Bestäm definitionsmängden till funktionen $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{1-x-y}$. Är den kompakt?

   Lösning: Rotfunktionen är bara definierad för icke-negativa variabler, så vi måste ha $x \geq 0$, $y \geq 0$ samt $1 - x - y \geq 0$, dvs $x + y \leq 1$. Området är den "solida rektangeln" med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$, inklusive randkurvorna, delar av linjerna $x = 0$, $y = 0$ samt $x + y = 1$.

   Området är *begränsat:* det ryms i cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 1$. Det är *slutet* eftersom randen ingår. Alltså är mängden kompakt (= sluten och begränsad).

2. Beräkna alla derivator av ordning ≤ 2 till funktionen $f(x,y) = \arctan(y/x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

   Lösning: Alla derivator beräknas för $x \neq 0$. Då är funktionen f av klass C^2. Med $g(x,y) = \arctan(y/x)$ ger direkt uträkning ($r = \sqrt{x^2+y^2}$)

   $$g'_x = \frac{-y}{r^2},\ g'_y = \frac{x}{r^2},\ g''_{xx} = \frac{-x^2+y^2}{r^4},\ g''_{yy} = \frac{x^2-y^2}{r^4}.$$

   Eftersom g är C^2 får vi

   $$g''_{xy} = g''_{yx} = \frac{-2xy}{r^4}.$$

   P.s.s. får vi följande derivator av $h(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \ln r$:

   $$h'_x = \frac{x}{r^2},\ h'_y = \frac{y}{r^2},\ h''_{xx} = \frac{-2xy}{r^4},\ h''_{yy} = \frac{+2xy}{r^4},$$

   medan

   $$h''_{xy} = h''_{yx} = \frac{x^2-y^2}{r^4}.$$

   Vi får slutligen

   $$f'_x = \frac{x-y}{r^2},\ f'_y = \frac{x+y}{r^2},$$
   $$f''_{xx} = \frac{-(x^2+2xy-y^2)}{r^4},\ f''_{yy} = \frac{x^2+2xy-y^2}{r^4},\ f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x^2-2xy+y^2}{r^4}.$$

3. Låt $u(s,t) = f(st)$, där f är en deriverbar funktion av en variabel. Visa att

$$t\frac{\partial u}{\partial t} - s\frac{\partial u}{\partial s} = 0.$$

Lösning: Enligt kedjeregeln gäller

$$\frac{\partial u}{\partial s} = f'(st)t, \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f'(st)s,$$

varför det sökta uttrycket är $tf'(st)s - sf'(st)t = 0$, dvs påståendet gäller.

4. Bestäm och karakterisera de kritiska punkterna till funktionen $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$.

Lösning: $\nabla f = (3x^2 - 3y, -3x + 3y^2)$, så f har en kritisk punkt precis då $y = x^2$ och $x = y^2$, med lösningarna $(0,0)$ och $(1,1)$.

Andraderivatorna blir $A = f''_{xx} = 6x$, $B = f''_{xy} = -3$ och $C = f''_{xx} = 6y$. Diskriminanten $\Delta = AC - B^2 = 36xy - 9$, så $\Delta < 0$ i (0,0) och > 0 i $(1,1)$. Alltså är $(0,0)$ en sadelpunkt och $(1,1)$ en lokal minimipunkt eftersom vi också har $A > 0$ i punkten.

5. Vilka värden antar $f(x,y) = xy(1-x-y)$ då $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$?

Lösning: *Inre kritiska punkter:* $f'_x = y(1-2x-y)$, $f'_y = x(1-x-2y)$. $f'_x = f'_y = 0$ precis då $y(1-2x-y) = x(1-x-2y) = 0$, vilket ger $x = y = 1/3$. $f(1/3, 1/3) = 1/27$.

Inre singulära punkter saknas. *Randen:* $f = 0$ då $x = 0$ eller $y = 0$. Återstår $x + y = 2$, $0 \leq x \leq 2$. Då gäller $f(x,y) = x(2-x)(-1) = x^2 - 2x = g(x)$. $g'(x) = 2(x-1) = 0$ då $x = 1$ och $g(1) = -1$. I ändpunkterna antar g värdet 0: $g(0) = g(2) = 0$. Alltså är *största värdet* $1/27$ *och minsta värdet* -1.

6. Beräkna dubbelintegralen av $f(x,y) = e^{y^3}$ då $\sqrt{x} \leq y \leq 1$ och $0 \leq x \leq 1$.

Lösning: Här måste man kasta om integrationsordningen! Området kan då skrivas $0 \leq x \leq y^2$, $0 \leq y \leq 1$. Integralen blir

$$\int_0^1 e^{y^3} \left(\int_0^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 e^{y^3} y^2 \, dy = \left[\tfrac{1}{3} e^{y^3} \right]_0^1 = \tfrac{1}{3}(e-1).$$

7. Beräkna arean av ytan $z = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.

Lösning: Låt D beteckna området $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \sqrt{x}$. Då är arean $A = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy$. Här gäller $z'_x = 1/(2\sqrt{x})$ och $z'_y = 0$, varför

$$\begin{aligned}
A &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dxdy = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}\, dx = \left[\tfrac{2}{3} \left(x + \tfrac{1}{4}\right)^{3/2} \right]_0^1 = \tfrac{2}{3}((5/4)^{3/2} - (1/4)^{3/2}).
\end{aligned}$$

8. Beräkna $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g)$ och $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g)$ då $f(x,y,z) = x^2 y$ och $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

   Lösning: $\nabla f = (2xy, x^2, 0)$ och $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$. Därmed blir $f\nabla g = (x{\cdot}2y, 2z)$ och divergensen $\nabla \cdot (f\nabla g) = 2\nabla \cdot (x^3 y, x^2 y^2, x^2 yz) = 2(3x^2 y + 2x^2 y + x^2 y) = 12x^2 y$. Detta besvarar fråga a).

   b)

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2xy & x^2 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = (2x^2 z, -4xyz, 4xy^2 - 2x^3) \quad \text{och}$$

$$\operatorname{rot}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla \times (\nabla f \times \nabla g) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2 z & -4xyz & 4xy^2 - 2x^3 \end{vmatrix}$$

$$= (8xy + 4xy, 2x^2 - 4y^2 + 6x^2, -4yz) = (12xy, 8x^2 - 4y^2, -4yz).$$

9. Beräkna $\int_C y^2\, dx + 2xy\, dy$ då C är kurvan $y = x^2$ från $(-1,1)$ till $(1,1)$.

   Lösning: Kurvan parametriseras av $x : -1 \to 1$. Integralen blir då

$$\int_{-1}^{1} (x^4 + 2x \cdot x^2 \cdot 2x)\, dx = \int_{-1}^{1} 5x^4\, dx = 2\int_0^1 5x^4\, dx = 2.$$

10. Beräkna flödesintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS$ då $\mathbf{F} = (3y, 2x, z)$, Y betecknar den del av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ där $z \ge 0$, och $\widehat{\mathbf{N}}$ är ytans uppåtriktade enhetsnormal.

    Lösning: För $z = 0$ får vi kurvan $x^2 + y^2 = 1$. Projektionen av ytan på xy-planet är därför området $D : x^2 + y^2 \le 1$. Vi har normalen $\mathbf{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (2x, 2y, 1)$. På ytan är

$$\mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = (3y, 2x, 1 - x^2 - y^2) \cdot (2x, 2y, 1)\, dxdy = (10xy + 1 - x^2 - y^2)\, dxdy,$$

varför flödesintegralen $I = \iint_D (8xy+1-x^2-y^2)\,dxdy = \iint_D (1-x^2-y^2)\,dxdy$ av symmetriskäl (x udda, integreras över symmetriskt intervall). Polära koordinater ger $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr = 2\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}) = \pi/2$.

Del II, sju uppgifter à 6 poäng:

11. Låt

$$f(x,y) = \frac{x^2 - x^2y^2 + y^2}{x^2 + x^2y^2 + y^2}, \qquad g(x,y) = \frac{x^4 - x^2y^2 + y^4}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$$

för $(x,y) \neq (0,0)$. Undersök om $f(x,y)$ och $g(x,y)$ har gränsvärden då $(x,y) \to (0,0)$ och beräkna dem i förekommande fall.

Lösning: Använd polära koordinater $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ för att uttrycka f. Vi får

$$f(x,y) = \frac{r^2 - r^4\cos^2\phi\sin^2\phi}{r^2 + r^4\cos^2\phi\sin^2\phi} = \frac{1 - r^2\cos^2\phi\sin^2\phi}{1 + r^2\cos^2\phi\sin^2\phi}.$$

Då $(x,y) \to (0,0)$, dvs då $r \to 0$, fås $r^2\cos^2\phi\sin^2\phi \to 0$, varför $f(x,y) \to 1/1 = 1$, så $f(x,y)$ har gränsvärdet 1 i origo.

Den andra funktionen, g, saknar gränsvärde i origo eftersom $g(x,0) = 1$ medan $g(x,x) = 1/3$ (för $x \neq 0$). (En funktion vars gränsvärde existerar kan inte ha olika gränsvärden längs olika linjer.)

12. a) Bestäm de punkter på kurvan $x^2y^3 - 3xy^2 - 9y + 9 = 0$ i vars omgivning y med säkerhet kan uttryckas som en deriverbar funktion av x.

b) Bestäm ekvationen för tangentlinjen till kurvan ovan i punkten $(0,1)$.

Lösning: a) Med $F(x,y) = x^2y^3 - 3xy^2 - 9y + 9$ är villkoret att $F'_y(x,y) \neq 0$. Vi har $F'_y = 3x^2y^2 - 6xy - 9 = 3(x^2y^2 - 2xy - 3) = 3((xy-1)^2 - 4)$, varför svaret är $xy \neq 3$ och $xy \neq -1$. Insättning av $x = c/y$ i kurvans ekvation, för $c = -1$ och $c = 3$ ger två punkter: $(\frac{2}{9}, -\frac{9}{2})$ resp. $(\frac{1}{3}, 9)$.

b) $y = y(x)$ och derivering m.a.p. x ger $2xy^3 + 3x^2y^2y' - 3y^2 - 6xyy' - 9y' = 0$. $x = 0$ och $y = 1$ ger $3 + 9y' = 0$, dvs $y' = -1/3$ i punkten. Alltså är tangentlinjens ekvation $y - 1 = -\frac{1}{3}x$.

13. Vilka värden antar funktionen $x^4 + 4xy + 2y^4 - 3y^{4/3} + 4$?.

Lösning: Låt $f(x,y)$ beteckna funktionen ovan (definierad i hela planet). Lite experimenterande får en att tro att funktionen endast antar värden i intervallet ≥ 0. Vi har

$$\frac{f(x,y)}{x^4 + 2y^4} = 1 + \frac{4xy - 3y^{4/3} + 4}{x^4 + 2y^4} = 1 + g(x,y),$$

där $g(x,y) \to 0$ då $|(x,y)| \to \infty$. (Fjärdegradstermerna vinner.) Det räcker därför att kolla att $f \geq 0$ i alla dess lokala extrempunkter, och därmed i alla kritiska punkter.

Nu är $\nabla f = (4x^3 + 4y, 4x + 8y^3 - 4y^{4/3})$. Första komponenten =0 ger $y = -x^3$, så att $y^{1/3} = -x$, varav $4x+8y^3-4y^{4/3} = 4x-8x^9+4x = 8x(1-x^8)$. De enda möjliga kritiska punkterna är således origo samt $(\pm 1, \pm 1)$ (alla kombinationer förekommer inte). Vi har $f(0,0) = 4 \geq 0$ samt $f(\pm 1, \pm 1) = 1 \pm 4 + 2 - 3 + 4 \geq 0$. Saken är klar!

14. Undersök om kurvorna $x^3+3x+3y+y^3 = 7/2$ och $x^2+y^2 = \frac{1}{2}$ skär varandra.

    Lösning: Låt $f(x,y) = x^3+3x+3y+y^3$. Bestäm de värden f antar under bivillkoret $g(x,y) = x^2+y^2-\frac{1}{2} = 0$. Lagranges metod (se tentamen 5B1107, 040413, uppgift 11) visar att f:s maxvärde är $13/4 < 14/4 = 7/2$, så värdet $7/2$ antas inte dvs *kurvorna skär inte varandra.*

15. Låt $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Planet $x/a + y/b + z/c = 1$ delar den solida ellipsoiden $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$ i två delar. Bestäm volymen av den mindre delen.

    Lösning: Låt V beteckna den sökta volymen. Variabelbytet $(x/a, y/b, z/c) = (u, v, w)$ ger $V = abc \iiint_K dudvdw$, där K betecknar de (u,v,w) som uppfyller $u^2+v^2+w^2 \leq 1$ och $u+v+w \geq 1$. Avståndet från origo till planet $u+v+w = 1$ är $k = 1/\sqrt{3}$. Vrid upp planet så att det blir $w = k$. Det ändrar inte volymen och den kan nu uttryckas som den del av klotet $u^2+v^2+w^2 \leq 1$ där $k \leq w \leq 1$.

$$\mathrm{vol}\,(K) = \iiint_K dudvdw = \int_k^1 A(w)\,dw$$

    där $A(w)$ betecknar arean av den cirkelskiva som fås för höjden w. Radien i denna cirkelskiva är $\sqrt{1-w^2}$, varför $A(w) = \pi(1-w^2)$ och

$$V = abc\int_k^1 \pi(1-w^2)\,dw = \frac{\pi abc}{3}(2 - 3k + k^3), \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

16. Låt D beteckna första kvadranten: $x \geq 0$, $y \geq 0$. Avgör för vilka värden på a den generaliserade integralen

$$\iint_D \frac{(xy)^a}{1 + (x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

    är konvergent.

Lösning: Låt $R > 0$ och beteckna med D_R de punkter $(x, y) \in D$ som uppfyller $x^2 + y^2 \leq R^2$. Vi beräknar motsvarande integral över D_R och låter sedan $R \to \infty$.

Övergång till polära koordinater ger oss en en konstant (från integration av vinklarna) gånger integralen $\int_0^\infty \frac{r^{2\alpha}}{1+r^4}\, r\, dr$. Denna integral konvergerar endast om integralen $\int_1^\infty r^{2\alpha+1-4}\, dr$ konvergerar, vilket sker precis då α är strikt mindre än 1.

17. Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, då $\mathbf{F} = (ye^x, x^2 + e^x, z^2 e^z)$ och C är kurvan $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t, 1 + \sin t, 1 - \cos t - \sin t)$, $t : 0 \to 2\pi$.

Lösning: Det är enklast att använda Stokes sats. Vi observerar att på kurvan C gäller $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ och $x + y + z = 3$. Kurvan ligger på skärningen mellan en cylinder, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, och ett plan, $x + y + z = 3$. Låt Y vara ytan $x + y + z = 3$, $(x, y) \in D$, där D är cirkelskivan $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ i xy-planet. Normalriktningen till Y är $\mathbf{N} = (1, 1, 1)$.

Uträkning visar att

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot}(0, x^2, 0) = (0, 0, 2x).$$

Stokes sats ger ($\widehat{\mathbf{N}}$ är uppåtpekande enhetsnormalen till Y)

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_Y \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_D (0, x^2, 0) \cdot (1, 1, 1)\, dxdy \\ &= \iint_D 2x\, dxdy = \iint_D (2(x-1) + 2)\, dxdy = \iint_D 2\, dxdy = 2\pi.\end{aligned}$$

En alternativ väg är att observera att $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$, där $\mathbf{G} = (ye^x, e^x, z^2 e^z)$ är konservativt med potentialfunktion $ye^x + (z^2 - 2z + 2)e^z$. Eftersom kurvan är sluten ger inte $\mathbf{G}$ något bidrag. Den återstående integralen är $\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_C x^2\, dy$ som kan beräknas direkt.