SF1603 Flervariabelanalys **Våren 2015**
Max: 60 poäng

Tentamen: Lösningsförslag

Torsdag 4 juni 2015 08:00-13:00
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. (6 poäng) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen

$$f(x, y, z) = 4xy^4 - \sin z$$

i punkten $\mathbf{a} = (1, 1/2, \pi)$.

Lösning: Låt $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Det sökta Taylorpolynomet ges av

$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{3} f'_j(\mathbf{a})(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3} f''_{jk}(\mathbf{a})(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}_j)(\mathbf{x}_k - \mathbf{a}_k),$$

där

$$f'_x(\mathbf{x}) = 4y^4, \quad f'_y(\mathbf{x}) = 16xy^3, \quad f'_z(\mathbf{x}) = -\cos z,$$

och alla andraderivator f''_{jk} är identiskt lika med noll förutom

$$f''_{xy}(\mathbf{x}) = f''_{yx}(\mathbf{x}) = 16y^3, \quad f''_{yy}(\mathbf{x}) = 48xy^2, \quad f''_{zz}(\mathbf{x}) = \sin z.$$

För $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ har vi

$$f'_x(\mathbf{a}) = 1/4, \quad f'_y(\mathbf{a}) = 2, \quad f'_z(\mathbf{a}) = 1,$$

$$f''_{xy}(\mathbf{a}) = f''_{yx}(\mathbf{a}) = 2, \quad f''_{yy}(\mathbf{a}) = 12, \quad f''_{zz}(\mathbf{a}) = 0.$$

Alltså får vi

$$P_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(x-1) + 2\left(y - \frac{1}{2}\right) + (z - \pi) + 2(x-1)\left(y - \frac{1}{2}\right) + 6\left(y - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Förenkling ger

$$P_2(\mathbf{x}) = \frac{3}{2} - \pi - \frac{3}{4}x - 6y + z + 2xy + 6y^2.$$

2. (6 poäng) Låt $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2, x_1)$ och $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = (t_1 + 4t_2, -2t_1 + 2t_2)$, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$. Beräkna funktionaldeterminanten för $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$.

Lösning: Funktionaldeterminanten $J(\mathbf{t})$ för $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ ges av

$$J(\mathbf{t}) = \det[(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(\mathbf{t})] = \det[\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{t}))\mathbf{g}'(\mathbf{t})] = \det[\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{t}))] \det[\mathbf{g}'(\mathbf{t})].$$

Vi har

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{g}'(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned} J(\mathbf{t}) &= \det \begin{pmatrix} 2(t_1 + 4t_2) & 2(-2t_1 + 2t_2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -2(-2t_1 + 2t_2)(2 - 4(-2)) = 40(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

3. (6 poäng) Beräkna det största värde som $f(x, y, z) = y\sqrt{xz}$ kan anta då x, y, z är icke-negativa tal med summa 1.

Lösning: Bivillkoret $g(x, y, z) = x + y + z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ beskriver en kompakt mängd på vilken funktionen f är kontinuerlig. Alltså antar f ett största värde. På randen (de tre kantlinjerna i koordinatplanen) är $f = 0$. Därför antas största värdet i en punkt där $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ och ∇f och ∇g är parallella. Vektorerna ∇f och ∇g är parallella om det existerar ett tal λ så att $\nabla f = \lambda \nabla g$, dvs

$$\left(\frac{yz}{2\sqrt{xz}}, \sqrt{xz}, \frac{xy}{2\sqrt{xz}} \right) = \lambda(1, 1, 1).$$

Detta villkoret är ekvivalent med ekvationerna

$$\frac{yz}{2\sqrt{xz}} = \sqrt{xz} = \frac{xy}{2\sqrt{xz}} \quad \text{dvs} \quad y = 2x = 2z.$$

Insättning i bivillkoret $g(x, y, z) = 1$ ger $4z = 1$ så enda lösningen är $(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Alltså är f's största värde

$$f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}.$$

4. (6 poäng) Beräkna linjeintegralen

$$\int_{\partial E} (x^2 + 2y)dx + xdy$$

där E är ellipsskivan $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 \leq 2\}$.

Lösning: Kurvan ∂E har parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Eftersom $\mathbf{r}'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t)$ finner vi

$$\begin{aligned} &\int_{\partial E} (x^2 + 2y)dx + xdy \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(2\cos^2 t + \sqrt{2}\sin t)(-\sqrt{2}\sin t) + (\sqrt{2}\cos t)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-2\sqrt{2}\cos^2 t \sin t - 2\sin^2 t + \cos^2 t \right] dt \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos^3 t \Big|_0^{2\pi} - 2\pi + \pi = -\pi. \end{aligned}$$

5. (6 poäng) Beräkna integralen $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Presentera alla steg i beräkningen.

Lösning: Vi har

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy\right) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\varphi = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^\infty = \pi.$$

Detta ger

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6. (6 poäng) Bestäm krökningen och torsionen i punkten $\mathbf{r}(\ln 2)$ av kurvan γ i $\mathbb{R}^3$ med parametrisering given av $\mathbf{r}(t) = (t, t, e^t)$.

Lösning: Vi har

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 1, e^t), \qquad \mathbf{r}''(t) = (0, 0, e^t), \qquad \mathbf{r}'''(t) = (0, 0, e^t),$$

vilket ger

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (e^t, -e^t, 0), \qquad |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{2}e^t.$$

Det följer att krökningen i punkten $\mathbf{r}(t)$ ges av

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{2}e^t}{(2 + e^{2t})^{3/2}}.$$

Sätter vi $t = \ln 2$ får vi att krökningen i punkten $\mathbf{r}(\ln 2)$ är

$$\kappa(\ln 2) = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Eftersom kurvan ligger i det två-dimensionella planet $x = y$ så är torsionen identiskt lika med noll. Detta kan också ses från formeln

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|^2} = 0.$$

7. (6 poäng) Bestäm alla lösningar $f(x, t)$ av klass C^2 till vågekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

genom att göra variabelbytet $(u, v) = (x + t, x - t)$.

Lösning: Vi har

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}, \end{cases}$$

vilket ger

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) f = \left(2\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(-2\frac{\partial}{\partial v}\right) f = -4\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Integration ger

$$\frac{\partial f}{\partial v} = g(v),$$

där $g(v)$ är en godtycklig funktion av en variabel. Ytterligare en integration ger

$$f(u, v) = G(v) + H(u),$$

där G är en primitiv funktion till g och H är en annan godtycklig funktion. Det följer att i de ursprungliga variablerna (x, t) kan den allmänna lösningen skrivas som

$$f(x, t) = G(x - t) + H(x + t),$$

där G och H är godtyckliga C^2-funktioner.

8. (6 poäng) I en rät cirkulär kon med höjd $h > 0$ och basradie $R > 0$ är densiteten proportionell mot avståndet till basytan och lika med 2 i konens spets. Bestäm konens massa.

Lösning: Vi inför cylindriska koordinater (r, φ, z) så att konens bas ligger i planet $z = 0$ och konens spets befinner sig i punkten $(0, 0, h)$. Densiteten ges av $\rho = 2z/h$. Om (r, φ, z) ligger på konens mantelyta så ser vi med hjälp av likformiga trianglar att

$$\frac{h - z}{r} = \frac{h}{R} \quad \text{dvs} \quad r = \frac{(h - z)R}{h}.$$

Alltså ges konen K i de cylindriska koordinaterna av

$$K: \quad 0 \le z \le h, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \frac{(h - z)R}{h}.$$

Vi finner att den totala massan är

$$\begin{aligned} M &= \iiint \rho dV = \iiint \rho r dr d\varphi dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{(h-z)R}{h}} \frac{2zr}{h} dr d\varphi dz \\ &= 2\pi \int_0^h \frac{2z}{h} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{\frac{(h-z)R}{h}} dz = 2\pi \int_0^h \frac{z}{h} \frac{(h - z)^2 R^2}{h^2} dz \\ &= \frac{2\pi R^2}{h^3} \int_0^h (h^2 z - 2hz^2 + z^3) dz = \frac{2\pi R^2}{h^3} \left(\frac{h^4}{2} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4}\right) = \frac{\pi R^2 h}{6}. \end{aligned}$$

9. (6 poäng) Beräkna integralen $F(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$ för $x > 0$ och $y > 0$ genom att derivera F.

Lösning: Vi beräknar

$$F'_x(x,y) = \int_0^\infty \frac{d}{dx} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt = -\int_0^\infty e^{-xt} dt = -\frac{1}{x}, \qquad x > 0, \quad y > 0,$$

där vi kan derivera innanför integraltecknet som en konsekvens av sats 3 på sida 189 i boken. Integration ger

$$F(x,y) = -\ln x + f(y), \qquad x > 0, \quad y > 0,$$

där det återstår att bestämma funktionen $f(y)$. Eftersom $F(y,y) = 0$ för $y > 0$, får vi $-\ln y + f(y) = 0$, dvs $f(y) = \ln y$. Detta ger

$$F(x,y) = \ln \frac{y}{x}, \qquad x > 0, \quad y > 0.$$

[Alternativt kan man utgå från derivatan

$$F'_y(x,y) = \int_0^\infty \frac{d}{dy} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt = \int_0^\infty e^{-yt} dt = \frac{1}{y}, \qquad x > 0, \quad y > 0,$$

vilket naturligtvis leder till samma svar.]

10. (6 poäng) Låt γ vara den slutna kurva i $\mathbb{R}^3$ som består av det raka linjesegmentet från $(1,0,0)$ till $(0,1,0)$, det raka linjesegmentet från $(0,1,0)$ till $(0,0,1)$, samt det raka linjesegmentet från $(0,0,1)$ till $(1,0,0)$. Bestäm det arbete som fältet

$$\mathbf{F} = (e^{\sin x} x^4, 5xy^3 z + xy^3, 3xy^4)$$

uträttar vid cirkulation runt kurvan γ.

Lösning: Låt S vara den del av ytan $x + y + z = 1$ som ligger i oktanten $\{(x,y,z) \,|\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ med positiv normal $\mathbf{N} = (1,1,1)$. Då är $\partial S = \gamma$. Stokes' sats innebär att arbetet W som $\mathbf{F}$ uträttar vid cirkulation runt γ kan skrivas som

$$W = \oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Vi noterar att

$$\mathbf{r}(s,t) = (1 - s - t, s, t), \qquad 0 \leq t \leq 1 - s, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

är en parametrisering av S med

$$\mathbf{r}'_s = (-1,1,0), \qquad \mathbf{r}'_t = (-1,0,1), \qquad \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = (1,1,1).$$

En räkning ger att

$$\nabla \times \mathbf{F} = \big(7xy^3, -3y^4, y^3(1 + 5z)\big).$$

Eftersom $d\mathbf{S} = \mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t dsdt = (1,1,1)dsdt$ får vi

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} &= (7xy^3 - 3y^4 + y^3(1+5z))|_{(x,y,z)=(1-s-t,s,t)}dsdt \\
&= (7(1-s-t)s^3 - 3s^4 + s^3(1+5t))dsdt \\
&= -2s^3(5s+t-4)dsdt.
\end{aligned}$$

Det följer att det uträttade arbetet är

$$\begin{aligned}
W &= -2\int_0^1 \int_0^{1-s} s^3(5s+t-4)dtds \\
&= -2\int_0^1 s^3\left(5s(1-s) + \frac{(1-s)^2}{2} - 4(1-s)\right)ds \\
&= \int_0^1 \left(7s^3 - 16s^4 + 9s^5\right)ds = \frac{7}{4} - \frac{16}{5} + \frac{3}{2} = \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$