SF1603 Flervariabelanalys **Våren 2015**
Max: 60 poäng

Tentamen

Torsdag 4 juni 2015 08:00-13:00
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. (6 poäng) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till funktionen
$$f(x, y, z) = 4xy^4 - \sin z$$
i punkten $\mathbf{a} = (1, 1/2, \pi)$.

2. (6 poäng) Låt $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_2^2, x_1)$ och $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = (t_1 + 4t_2, -2t_1 + 2t_2)$, där $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ och $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$. Beräkna funktionaldeterminanten för $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$.

3. (6 poäng) Beräkna det största värde som $f(x, y, z) = y\sqrt{xz}$ kan anta då x, y, z är icke-negativa tal med summa 1.

4. (6 poäng) Beräkna linjeintegralen
$$\int_{\partial E} (x^2 + 2y)dx + xdy$$
där E är ellipsskivan $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 2\}$.

5. (6 poäng) Beräkna integralen $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Presentera alla steg i beräkningen.

6. (6 poäng) Bestäm krökningen och torsionen i punkten $\mathbf{r}(\ln 2)$ av kurvan γ i $\mathbb{R}^3$ med parametrisering given av $\mathbf{r}(t) = (t, t, e^t)$.

7. (6 poäng) Bestäm alla lösningar $f(x, t)$ av klass C^2 till vågekvationen
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
genom att göra variabelbytet $(u, v) = (x + t, x - t)$.

8. (6 poäng) I en rät cirkulär kon med höjd $h > 0$ och basradie $R > 0$ är densiteten proportionell mot avståndet till basytan och lika med 2 i konens spets. Bestäm konens massa.

9. (6 poäng) Beräkna integralen $F(x, y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$ för $x > 0$ och $y > 0$ genom att derivera F.

10. (6 poäng) Låt γ vara den slutna kurva i $\mathbb{R}^3$ som består av det raka linjesegmentet från $(1, 0, 0)$ till $(0, 1, 0)$, det raka linjesegmentet från $(0, 1, 0)$ till $(0, 0, 1)$, samt det raka linjesegmentet från $(0, 0, 1)$ till $(1, 0, 0)$. Bestäm det arbete som fältet
$$\mathbf{F} = (e^{\sin x} x^4, 5xy^3 z + xy^3, 3xy^4)$$
uttr](ättar vid cirkulation runt kurvan γ.