SF1603 Flervariabelanalys **Våren 2015**
Max: 60 poäng

Omtentamen: Lösningsförslag

Torsdag 20 augusti 2015 08:00-13:00
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. (6 poäng) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = \sqrt{1 + x^3y^2}$ i den punkt där $(x, y) = (3, 2)$.

   Lösning: Tangentplanet ges av

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

   där $f(x, y) = \sqrt{1 + x^3y^2}$ och $(a, b) = (3, 2)$. Eftersom

$$f'_x(x, y) = \frac{3x^2y^2}{2\sqrt{1 + x^3y^2}}, \qquad f'_y(x, y) = \frac{x^3y}{\sqrt{1 + x^3y^2}},$$

   har vi

$$f(a, b) = \sqrt{109}, \qquad f'_x(a, b) = \frac{54}{\sqrt{109}}, \qquad f'_y(a, b) = \frac{54}{\sqrt{109}}.$$

   Alltså får vi följande ekvation för tangentplanet:

$$z = \sqrt{109} + \frac{54}{\sqrt{109}}(x - 3) + \frac{54}{\sqrt{109}}(y - 2).$$

2. (6 poäng) Bestäm längden L av den slutna kurvan i planet given av

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \sin^3 t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

   (Denna kurva kallas för en *astroid.*)

   Lösning: Kurvan visas i Figur 1. Symmetri medför att kurvans totala längd är fyra gånger längden av den del av kurvan som ligger i första kvadranten, dvs $L = 4L_1$ där L_1 är längden av kurvan

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \sin^3 t, \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

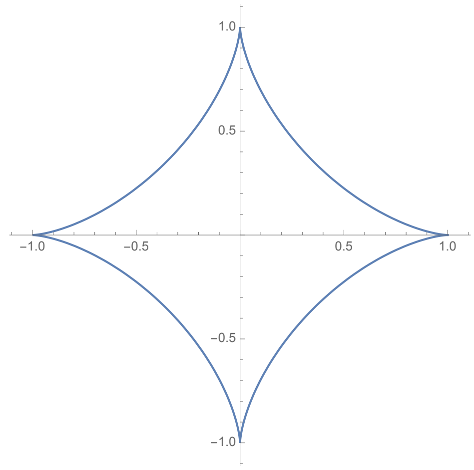

Figure 1 *Astroiden* $(x(t), y(t)) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ *där* $0 \leq t \leq 2\pi$.

En räkning ger att

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} dt \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t \sin t| dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt \\
&= -3\frac{\cos^2 t}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Eftersom $L = 4L_1$ finner vi att astroidens längd är $L = 6$.

3. (6 poäng) Bestäm $\frac{\partial z}{\partial x}$ och $\frac{\partial z}{\partial y}$ i punkten $(0, 0, 0)$ om $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y = 0$.

Lösning: Låt $F(x, y, z) = x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y$. Då är

$$F'_x = 3x^2 + zye^{xz}, \qquad F'_y = e^{xz} - z\sin y, \qquad F'_z = 2z + xye^{xz} + \cos y.$$

Eftersom $F(0, 0, 0) = 0$, $F_z(0, 0, 0) = 1 \neq 0$ och F är en C^1-funktion, så medför implicita funktionssatsen att $F(x, y, z) = 0$ definierar z som en deriverbar funktion av x och y nära punkten $(0,0,0)$. Vi finner att

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3x^2 + zye^{xz}}{2z + xye^{xz} + \cos y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{e^{xz} - z\sin y}{2z + xye^{xz} + \cos y}.$$

I punkten $(0,0,0)$ ger detta

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{0}{1} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1} = -1.$$

4. (6 poäng) Transformera differentialuttrycket

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$$

genom att införa nya variabler u och v definierade genom

$$x = e^{u+v}, \qquad y = e^{u-v}.$$

Lösning: Vi har

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} = e^{u+v}\frac{\partial}{\partial x} + e^{u-v}\frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\\
\frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y} = e^{u+v}\frac{\partial}{\partial x} - e^{u-v}\frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

vilket ger

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}.$$

Alltså är

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

5. (6 poäng) Beräkna

$$\iint_D e^{(x+y)^2}\,dxdy$$

där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(0,2)$.

Lösning: Sätt $g(x,y) = x + y$ och

$$G_u = \{(x,y) \in D \,|\, g(x,y) \le u\}.$$

Låt $A(u)$ vara arean av G_u. Då är

$$A(u) = \frac{u^2}{2}.$$

Med $h(u) = e^{u^2}$ kan integranden skrivas

$$e^{(x+y)^2} = h(g(x,y)).$$

Enligt teorin för integration med hjälp av nivåkurvor blir

$$\iint_D e^{(x+y)^2}dxdy = \int_0^2 h(u)A'(u)du = \int_0^2 e^{u^2}udu = \frac{e^{u^2}}{2}\bigg|_0^2 = \frac{e^4-1}{2}.$$

6. (6 poäng) Låt $\mathbf{F} = \big(3x^2y - 2xz\sin(x^2), x^3 - \sin z, \cos(x^2) - y\cos z\big)$.

(a) Finn en potential till vektorfältet $\mathbf{F}$.

Lösning: Vi söker en funktion $f(x,y,z)$ sådan att $\nabla f = \mathbf{F}$, dvs

$$f'_x = 3x^2y - 2xz\sin(x^2), \qquad f'_y = x^3 - \sin z, \qquad f'_z = \cos(x^2) - y\cos z. \quad (1)$$

Integration av den första relationen i (1) ger

$$f(x,y,z) = x^3y + z\cos(x^2) + g(y,z),$$

där $g(y,z)$ är en godtycklig funktion av y och z. Om vi stoppar in detta uttrycket i ekvationen $f'_y = x^3 - \sin z$ ser vi att

$$x^3 + g'_y(y,z) = x^3 - \sin z, \quad \text{dvs} \quad g(y,z) = -y\sin z + h(z),$$

där $h(z)$ är en godtycklig funktion av z. Insättning av

$$f(x,y,z) = x^3y + z\cos(x^2) - y\sin z + h(z),$$

i relationen $f'_z = \cos(x^2) - y\cos z$ ger nu att $h'(z) = 0$. Det följer att följande funktion är en potential:

$$f(x,y,z) = x^3y + z\cos(x^2) - y\sin z + C,$$

där C är en godtycklig konstant.

(b) Beräkna integralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där γ går från $(0,0,0)$ till $(\sqrt{\pi}, \frac{\pi}{2}, \pi)$ längs kurvan

$$\left(\sqrt{t}, \frac{t}{2+\sin^2 t}, t\right), \qquad 0 \le t \le \pi.$$

Lösning: Eftersom det finns en potentialfunktion till fältet så är integral oberoende av vägen och vi har

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f\left(\sqrt{\pi}, \frac{\pi}{2}, \pi\right) - f(0,0,0) = \frac{\pi^{5/2}}{2} - \pi.$$

7. (6 poäng) Beräkna $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, xy, 3xz)$ och S är den del av planet $2x + y + z = 2$ som ligger i första oktanten $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Antag att ∂S är orienterad medurs sedd från origo.

Lösning: Stokes' sats ger att

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS.$$

Projektionen av S på (xy)-planet är en triangel begränsad av linjerna $x = 0$, $y = 0$, och $2x + y = 2$. Det följer att S är en funktionsyta $z = f(x, y)$ där $f(x, y) = 2 - 2x - y$ och $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2 - 2x$. Den givna orienteringen innebär att normalen $\mathbf{N}$ är riktad uppåt. Det följer att

$$\mathbf{N} dS = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) dxdy = (2, 1, 1) dxdy.$$

Eftersom

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = (0, x - 3z, y),$$

finner vi

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (0, x - 3(2 - 2x - y), y) \cdot (2, 1, 1) dydx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (7x - 6 + 4y) dydx = -1. \end{aligned}$$

Alltså är $\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -1$.

8. (6 poäng) Beräkna integralen

$$I = \int_0^3 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \left(\frac{2x - y}{2} + \frac{z}{3} \right) dxdydz$$

genom att utföra variabelbytet

$$u = \frac{2x - y}{2}, \qquad v = \frac{y}{2}, \qquad w = \frac{z}{3},$$

och integrera över en lämplig volym i uvw-rummet.

Lösning: Låt $D \subset \mathbb{R}^3$ vara mängden som vi integrerar över i xyz-rummet:

$$D: \quad \frac{y}{2} \leq x \leq \frac{y}{2} + 1, \qquad 0 \leq y \leq 4, \qquad 0 \leq z \leq 3.$$

Eftersom

$$x = u + v, \qquad y = 2v, \qquad z = 3w,$$

ser vi variabelbytet avbildar D på följande mängd i uvw-rummet:

$$v \le u + v \le v + 1, \qquad 0 \le 2v \le 4, \qquad 0 \le 3w \le 3,$$

dvs

$$0 \le u \le 1, \qquad 0 \le v \le 2, \qquad 0 \le w \le 1.$$

Funktionaldeterminanten är

$$\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

och integranden kan uttryckas som

$$\frac{2x - y}{2} + \frac{z}{3} = u + w.$$

Alltså får vi

$$I = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u + w) \frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} dudvdw = 6 \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u + w) dudvdw$$
$$= 12 \int_0^1 (\frac{1}{2} + w) dw = 12.$$

9. (6 poäng) Bestäm flödet av vektorfältet

$$\mathbf{u} = \frac{(x,y,z)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

ut ur området

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 3\}.$$

Lösning: Låt $\mathbf{r} = (x,y,z)$ och $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, så att $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r^2$. Det sökta flödet ges av

$$\iint_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS,$$

där ∂K består av sfären $r = \sqrt{3}$ med normal $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ samt sfären $r = \sqrt{2}$ med normal $\mathbf{N} = -\frac{\mathbf{r}}{r}$. Detta ger

$$\iint_{\partial K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{r=\sqrt{3}} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dS - \iint_{r=\sqrt{2}} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dS$$
$$= \iint_{r=\sqrt{3}} \frac{1}{r} dS - \iint_{r=\sqrt{2}} \frac{1}{r} dS$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} 4\pi (\sqrt{3})^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} 4\pi (\sqrt{2})^2 = 4\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

10. (6 poäng) Beräkna volymen av det begränsade området K mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $3x + 2y + z = 2$.

Lösning: Om (x, y, z) är en skärningspunkt mellan paraboloiden och planet, så gäller

$$x^2 + y^2 = 2 - 3x - 2y, \quad \text{dvs} \quad \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{21}{4}.$$

Projektionen av K på xy-planet är alltså cirkelskivan D given av

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 \le \frac{21}{4} \right\}.$$

I de polära koordinaterna (r, φ) definierade genom

$$x = -\frac{3}{2} + r\cos\varphi, \qquad y = -1 + r\sin\varphi,$$

så ges D as

$$D: \quad 0 \le r \le \frac{\sqrt{21}}{2}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Nu har vi

$$\text{Volym}(K) = \iint_D (2 - 3x - 2y - (x^2 + y^2))\,dxdy$$

och

$$2 - 3x - 2y - (x^2 + y^2) = \frac{21}{4} - r^2.$$

Så efter variabelbyte till (r, φ) finner vi att

$$\text{Volym}(K) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{21}}{2}} \left(\frac{21}{4} - r^2\right) r\,dr\,d\varphi = 2\pi \left[\frac{21}{8} r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{441\pi}{32}.$$