Tentamen

Torsdag 20 augusti 2015 08:00-13:00
Differential- och integralkalkyl II, del 2, SF1603, Flervariabelanalys
Inga hjälpmedel är tillåtna
Max: 60 poäng

1. (6 poäng) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = \sqrt{1 + x^3y^2}$ i den punkt där $(x, y) = (3, 2)$.

2. (6 poäng) Bestäm längden L av den slutna kurvan i planet given av
$$x = \cos^3 t, \qquad y = \sin^3 t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$
(Denna kurva kallas för en *astroid*.)

3. (6 poäng) Bestäm $\frac{\partial z}{\partial x}$ och $\frac{\partial z}{\partial y}$ i punkten $(0, 0, 0)$ om $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y = 0$.

4. (6 poäng) Transformera differentialuttrycket
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$$
genom att införa nya variabler u och v definierade genom
$$x = e^{u+v}, \qquad y = e^{u-v}.$$

5. (6 poäng) Beräkna
$$\iint_D e^{(x+y)^2}\,dxdy$$
där D är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(2, 0)$ och $(0, 2)$.

6. (6 poäng) Låt $\mathbf{F} = \big(3x^2y - 2xz\sin(x^2), x^3 - \sin z, \cos(x^2) - y\cos z\big)$.
(a) Finn en potential till vektorfältet $\mathbf{F}$.
(b) Beräkna integralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där γ går från $(0, 0, 0)$ till $(\sqrt{\pi}, \frac{\pi}{2}, \pi)$ längs kurvan
$$\left(\sqrt{t}, \frac{t}{2 + \sin^2 t}, t\right), \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

7. (6 poäng) Beräkna $\oint_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, xy, 3xz)$ och S är den del av planet $2x + y + z = 2$ som ligger i första oktanten $\{x > 0, y > 0, z > 0\}$. Antag att ∂S är orienterad medurs sedd från origo.

8. (6 poäng) Beräkna integralen

$$I = \int_0^3 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3} \right) dxdydz$$

genom att utföra variabelbytet

$$u = \frac{2x-y}{2}, \qquad v = \frac{y}{2}, \qquad w = \frac{z}{3},$$

och integrera över en lämplig volym i uvw-rummet.

9. (6 poäng) Bestäm flödet av vektorfältet

$$\mathbf{u} = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$$

ut ur området

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2 \le x^2+y^2+z^2 \le 3\}.$$

10. (6 poäng) Beräkna volymen av det begränsade området K mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $3x + 2y + z = 2$.