LÖSN. LINJ. ALG I : 5B1108, UTGÅENDE KURS
MÅ 10 JAN 05

(1)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 1 \\ 2 & 1-a & 1+a & 3 \\ 4 & -a & 3 & 3+a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \end{array}\right) \ast$$

Determinanten är $2(1-a-a^2+a) = 2(1-a)(1+a)$

om $a^2 \neq 1$ så har systemet unik lösning

om $a = -1$ har vi $\ast \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ så ingen lösning existerar

om $a = 1$ har vi $\ast \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ som har ∞ antal lösningar

(2) $p(z) = z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 5$ och $p'(z) = 4z^3 + 12z^2 + 20z + 12$ har nollstället $z = -1$ (efter prövning). Således är $z = -1$ ett dubbelnollställe. Faktorsatsen ger då att $z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 5 = (z^2 + 2z + 1)(z^2 + az + 5)$
Identifiering av koeff framför z ger $a = 2$
$z^2 + 2z + 5 = (z+1)^2 + 2^2 = (z+1+2i)(z+1-2i)$ ger nollställena
$\{-1, -1, -1+2i, -1-2i\}$

(3)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{inversen} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) utv. efter sista kolonn $\Rightarrow \det\ldots = 2\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \{\text{utv. sista kolonn}\} = 4\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \{\text{utv. första rad}\} = 4\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 8$

5) En enhets normal till H ges av $n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

varför matrisen för S i standardbasen är

$$I - 2nn^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

6) Sätt $A = (1,3,-2)$, $B = (2,2,0)$ och $C = (-1,0,3)$

a) Då har vi $(B-A)\times(C-A) = (1,-1,2)\times(-2,-3,5) = (1,-9,-5)$

Arean är då $\frac{1}{2}\|(B-A)\times(C-A)\| = \frac{1}{2}\sqrt{107}$

b) $(B-A)\times(C-A) = (1,-9,-5)$ är normal till planet

och t ex $B = (2,2,0)$ är en punkt i planet

som således har ekv $(x-2, y-2, z)\bullet(1,-9,-5) = 0$

eller $x - 9y - 5z + 16 = 0$

7) Linjen L går genom punkterna $A = (1,2,3)$ och

$B = (3,1,2)$. Låt $P = (2,3,1)$. Punkten Q

på L som ligger närmast P ges då av

$$Q = A + \frac{(B-A)\bullet(P-A)}{\|B-A\|^2}(B-A) = \ldots = (2, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}).$$

8) kvadratkomplettering ger $x^2 + y^2 + 3yz + 5z^2 =$

$$= x^2 + (y + \tfrac{3}{2}z)^2 - \tfrac{9}{4}z^2 + \tfrac{20}{4}z^2 = x^2 + (y + \tfrac{3z}{2})^2 + \tfrac{11}{4}z^2 = \tfrac{9}{2}$$

som är en ellipsoid.

Vi kan också resonera så här!

$$2x^2 + 2y^2 + 6yz + 10z^2 = (x\ y\ z)\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 9$$

och matrisen $A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 10\end{pmatrix}$ har karakt. polyn.

$\det(A - \lambda I) = \ldots = (2-\lambda)(\lambda-11)(\lambda-1)$, dvs

egenvärdena $2, 11, 1$ är alla strikt positiva.

9) $(I-A)(I+A+\ldots+A^9) = I + A + \ldots + A^9 - (A + A^2 + \ldots + A^9 + 0) = I$

10) $A = A^T \Rightarrow$ Det existerar ON-bas $u_1 \ldots u_n$ av egenvektorer

till A, som alla har egenvärdet 1 $\Rightarrow Au_i = u_i \ \forall i$

$\Rightarrow A = I$.