Institutionen för matematik, **KTH**
Lars Svensson

Tentamen i Linjär algebra I, 5B1108, utgående kurs . måndagen den 10/01 2005 kl. 08.00 - 13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Betygsgränser: 16 poäng ger betyget tre, 22 poäng ger betyget fyra och 30 poäng ger betyget fem.

(3p) **1.** Bestäm för varje reellt tal a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x & -ay & +z & = 1 \\ 2x & +(1-a)y & +(1+a)z & = 3 \\ 4x & -ay & +3z & = 3+a \end{cases}$$

(3p) **2.** Polynomet $p(z) = z^4 + 4z^3 + 10z^2 + 12z + 5$ har ett dubbelnollställe som är ett heltal. Finn alla rötterna till polynomet.

(3p) **3.** Beräkna inversen till matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3p) **4.** Beräkna determinanten av matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3p) **5.** Bestäm matrisrepresentationen, i standardbasen, för speglingen S i planet

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Var god vänd!

(4p) **6.** Betrakta de tre punkterna $(1, 3, -2)$, $(2, 2, 0)$ och $(-1, 0, 3)$ i $\mathbb{R}^3$.

(2p) (a) Bestäm arean av triangeln som har sina hörn i de givna punkterna.

(2p) (b) Bestäm ekvationen för planet genom de givna punkterna.

(4p) **7.** En linje L går genom punkterna $(1, 2, 3)$ och $(3, 1, 2)$. Bestäm punkten på L som ligger närmast punkten $(2, 3, 1)$.

(4p) **8.** Visa att de punkter som satisfierar ekvationen

$$2x^2 + 2y^2 + 6yz + 10z^2 = 9$$

utgör en ellipsoid.

(4p) **9.** Låt A vara en kvadratisk matris sådan att $A^{10} = 0$. Verifiera att

$$I + A + A^2 + \cdots + A^9$$

en invers till $I - A$.

(4p) **10.** En symmetrisk matris har alla sina egenvärden lika med ett. Visa att A är identitetsmatrisen I.

Lycka till!