Institutionen för matematik
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Linjär Algebra I, 5B1128 och 5B1108, utgående kurs, onsdagen den 11 januari 2006 klockan 08.00-13.00.

1. (3p) Lös ekvationen
$$x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0.$$

   Svar: $x = -1$, $x = 1 \pm 2i$

2. (3p) Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Svar: $\lambda = -2$ med egenrummet $span\{(1, -1)\}$

   $\lambda = 5$ med egenrummet $span\{(3, 4)\}$

3. (3p) Bestäm samtliga lösningar till det linjära ekvationssytemet
$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & 8x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \end{cases}$$

   Svar: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) + t(-7, 1, 5)$.

4. (3p) Betrakta vanliga 3-dimensionella rymden med ett rätvinkligt koordinatsystem. Triangeln T har hörn i punkterna $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 1)$ och $(3, 3, -1)$. Bestäm arean av triangeln T.

   Svar: $\frac{1}{2} 5\sqrt{3}$

5. (3p) Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna nedanstående matriser.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Lös matrisekvationen $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$.

   Svar: $\mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1}$ där
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Utför sedan matrismultiplikationen.

6. (4p) Bestäm avståndet mellan punkten $(1, 2, 1)$ och den räta linje som passerar genom punkterna $(1, 1, 1)$ och $(2, 1, 0)$.

   Svar: 1

7. (4p) Ange alla reella tal a för vilka matrisen A nedan är inverterbar.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & 2 & a+1 \end{pmatrix}.$$

   Svar: Då determinanten av matrisen är skild ifrån noll, dvs då $(a-1)(a-2) \neq 0$, dvs $a \neq 1$ och $a \neq 2$.

8. (4p) Låt π beteckna planet med ekvationen $x + y - 2z = 3$. Bestäm ekvationen för plan som ligger vinkelrätt mot detta plan och som innehåller punkterna $(1, 1, 1)$ och $(0, -1, 1)$.

   Lösning: Det sökta planet kommer att vara parallellt med det givna planets normalvektor $(1, 1, -2)$, samt vara parallellt med vektorn mellan de givna punkternat dvs $(1, 1, 1) - (0, -1, 1) = (1, 2, 0)$. En normal till sökta planet ges då av

$$(1, 1, -2) \times (1, 2, 0) = (4, -2, 1)$$

   Då punkten $(1, 1, 1)$ tillhör planet får vi

   Svar: $4(x-1) - 2(y-1) + (z-1) = 0$.

9. (4p) Bestäm samtliga komplexa tal z som satisfierar ekvationen $\bar{z} = z^2$, där $\bar{z}$ betecknar konjugatet till z.

   Lösning: Då $|z| = |\bar{z}|$ har vi att $|z|^3 = |z|$ som ger $|z| = 0$ eller 1. Multiplicera givna ekvationen med z. Då $z\bar{z} = |z|^2$ får vi att

$$1 = z^3$$

   dvs $z = 1$ eller $z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$.

   For alla dessa rötter, även $z = 0$, gäller att de uppfyller ekvationen.

10. (4p) Om 3×3-matrisen $\mathbf{A}$ vet man att vektorerna $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 0)$ och $(-1, 2, 1)$ är egenvektorer till $\mathbf{A}$. Dessutom vet man att $\mathbf{A}(8, -2, -2)^T = (14, 4, 0)$. Bestäm $\mathbf{A}(2, 1, 2)^T$.

    Lösning: Bestämmer koordinaterna för $(8, -2, -2)$, $(14, 4, 0)$ och $(2, 1, 2)$ i basen $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 0)$ och $(-1, 2, 1)$.

    Vi får

$$(8, -2, -2) = (1, 2, 1) + 2(2, 1, 0) - 3(-1, 2, 1)$$
$$(14, 4, 0) = 3(1, 2, 1) + 4(2, 1, 0) - 3(-1, 2, 1)$$

    dvs

$$A(8, -2, -2)^T = A(1, 2, 1) + 2A(2, 1, 0) - 3A(-1, 2, 1)) = 3(1, 2, 1) + 4(2, 1, 0) - 3(-1, 2, 1)$$

    som ger att egnvärdena är 3, 2, 1.

    Då

$$(2, 1, 2) = 5(1, 2, 1) - 3(2, 1, 0) - 3(-1, 2, 1)$$

    så blir då

$$A(2, 1, 2) = 5A(1, 2, 1) - 3A(2, 1, 0) - 3A(-1, 2, 1) = 15(1, 2, 1) - 6(2, 1, 0) - 3(-1, 2, 1) = (6, 18, 12)$$